UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EL TEOREMA DE LITTLEWOOD Y EL MÉTODO DE WEYL EN LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

BR. MANUEL JESÚS SAAVEDRA JIMÉNEZ

Piura - Perú

2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Br. Manuel Jesús Saavedra Jiménez

Dr. Julio Enrique López Castillo

Mg. Luis Aguilar Ibañez
Presidente de Jurado de Tesis

Mg. Sonia Alicia Casos Fernández
Secretaria del Jurado de Tesis

Lic. Juan Martín Reyes Reyes
Vocal de Jurado de Tesis

Este trabajo se lo dedico

a mis queridos padres Manuel y Elva

a mis hermanos: Tania, Aliana, Karen, Anthony, Leyla

y a mi ahijada: María del Socorro.

Introducción

La función Zeta de Riemann$\zeta(s)$, está rodeada de misterios e intrincadas consecuencias, más aún, todo esto yace en el "Hipótesis de Riemann" considerado el problema más difícil de las matemáticas.

Para una mayor compresión de la función Zeta de Riemann, se ha considerado necesario el estudio de funciones aritméticas y de las series de Dirichlet, desarrollados en el Capítulo I.

En el Capítulo II, se estudia la ecuación funcional, la cual es usada en la prueba de la infinidad de ceros de $\zeta(s)$ en la banda, $0 < \Re(s) < 1$, además se estudia un resultado muy interesante, el Teorema de Hardy, el cual muestra la existencia de una infinidad de ceros con parte real $1/2$, por último se estudia el Teorema de Hamburger, dándole a $\zeta(s)$ un sentido de unicidad respecto a las series de Dirichlet que cumplen con la ecuación funcional.

En el Capítulo III, se hace estimaciones de ordenes y regiones libres de ceros de $\zeta(s)$, mediante el método de Weyl y el Teorema de Littlewood.

Índice general

Capítulo 1

Funciones Aritméticas y Series de Dirichlet

1.1. Funciones Aritméticas

Definición. Una función real (o compleja) definida sobre los enteros positivos se llama función aritmética o una función de Teoría de números.

1.1.1. La Función de Möbius $\mu(n)$

Definición. La función de Möbius μ se define como sigue:

- $\mu(1) = 1$;
- Si $n > 1$, escribiremos $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, entonces:

  $\mu(n) = (-1)^k$ si $a_1 = \cdots a_k = 1$

  $\mu(n) = 0$ en otro caso.

Teorema 1.1. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = [\![1/n]\!]$$

Demostración. Para $n = 1$ es inmediato. Para $n > 1$, descomponemos $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, en donde μ no se anula para $d = 1$ y para productos de primos distintos, así

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \ldots \\ &\quad + \mu(p_{k-1} p_k) + \cdots + \mu(p_1 \cdots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1)^k + \cdots \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0 \end{aligned}$$

□

1.1.2. La Función Indicatriz de Euler $\varphi(n)$

Definición. Si $n \geq 1$ la indicatriz de Euler $\varphi(n)$ es el número de enteros positivos menores que n que son primos con n.

Teorema 1.2. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Algunas relaciones entre φy μ:

Para $n \geq 1$ tenemos

- $\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$
- $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

1.1.3. El Producto de Dirichlet de Funciones Aritméticas

Definición. Si f y g son dos funciones aritméticas, definimos su producto de Dirichlet como la función aritmética h definida por

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d)$$

Definamos la función aritmética N tal que $N(n) = n$ para todo n.

Ejemplo. La función φ es el producto de Dirichlet de las funciones μy N.

$$\varphi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d} = \sum_{d|n}\mu(d)N\left(\frac{n}{d}\right) = (\mu * N)(n)$$

así deducimos que $\varphi = \mu * N$.

Teorema 1.3. *El producto de Dirichlet es asociativo y conmutativo. Esto es, para toda terna de funciones aritméticas f, g, k, tenemos*

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * k = f * (g * k).$$

Demostración. Para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
(f * g)(n) &= \sum_{ab=n} f(a)g(b) = \sum_{ba=n} g(b)f(a) = (g * f)(n) \\
(f * (g * k))(n) &= \sum_{ap=n} f(a)(g * k)(p) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)k(c) \\
&= \sum_{qc=n} (f * g)(q)k(c) = ((f * g) * k)(n)
\end{aligned}$$

□

Definición. La función aritmética I dado por $I(n) = [\![1/n]\!]$; se llama función identidad.

Teorema 1.4. *Para toda función aritmética f se tiene $(I * f) = (f * I) = f$.*

Definición. La función unidad u es dado por, $u(n) = 1$ para todo n.

Teorema 1.5. *Si f es una función aritmética con $f(1) \neq 0$, existe una única función aritmética f^{-1}, tal que $(f * f^{-1}) = (f^{-1} * f) = I$.*

Es evidente que $\mu * u = I$, pues

$$I(n) = \sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{d|n}\mu(d)u(d) = (\mu * u)(n).$$

Teorema 1.6. *Fórmula de Inversión de Möbius.*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad implica$$
$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Demostración. Para $n \geq 1$,

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)u(n/d) = (g * u)(n)$$

luego, $f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g.$ □

1.1.4. La Función de Mangoldt $\Lambda(n)$

Definición. Para cada entero $n \geq 1$,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & si\ n = p^m\ para\ algún\ primo\ p\ y\ algún\ m \geq 1, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Teorema 1.7. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

Demostración. Si $n = 1$, ambos miembros son 0. Ahora suponiendo $n > 1$, entonces admite una descomposición

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$$

luego

$$\log n = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{a_k} \log p_k \right) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{a_k} \Lambda(p_k^i) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

□

Teorema 1.8. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

1.1.5. Funciones Multiplicativas

Definición. Una función aritmética f es llamada función multiplicativa si f no es identicamente nula y si

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad \textit{siempre que} \qquad (m,n) = 1.$$

Una función multiplicativa f se llama completamente multiplicativa si verifica: $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo m, n.

Es evidente que si f es multiplicativa, entonces $f(1) = 1$. Puesto que $\Lambda(1) = 0$, la función de Mangoldt no es multiplicativa.

Nota: Las funciones multiplicativas forman un grupo bajo el producto de Dirichlet.

Teorema 1.9. *Sea f multiplicativa. Entonces f es completamente multiplicativa si y solo sí,*

$$f^{-1} = \mu(n)f(n) \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

1.1.6. Convoluciones Generalizadas

F designa una función con valores reales o complejos definida en el eje real positivo $(0, +\infty)$ tal que $F(x) = 0$ para $0 < x < 1$, α una función aritmética.

$$(\alpha \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) F(x/n)$$

Si $F(x) = 0$ para todo x no entero, la restricción de F a los enteros es una función aritmética y se observa que

$$(\alpha \circ F)(x) = (\alpha * F)(m)$$

para todo entero $m \geq 1$, por lo que $\circ$ se puede considerar como una generalización del producto de Dirichlet $*$.

Observación. Para todo par de funciones aritméticas α y β tenemos

$$\alpha \circ (\beta \circ F) = (\alpha * \beta) \circ F$$

Teorema 1.10. *Si α tiene inversa de Dirichlet α^{-1}, entonces*

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n \leq x} \alpha(n) F(x/n), \quad \textit{implica} \\ F(x) &= \sum_{n \leq x} \alpha^{-1}(n) G(x/n) \end{aligned}$$

1.2. Medias Aritméticas

Las medias suavizan las fluctuaciones obteniendo un comportamiento más regular que la función aritmética inicial.

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Definición. Si $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, escribiremos

$$f(x) = O(g(x)) \qquad f(x) \textit{ es } O \textit{ mayúscula de } g(x)$$

para indicar que el cociente $f(x)/g(x)$ está acotado para $x \geq a$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, se dice que $f(x)$ es asintótica a $g(x)$ cuando $x \to \infty$, escribiendo $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to \infty$.

Teorema 1.11. (Fórmula de sumación de Euler) *Si f posee derivada continua f'en el intervalo $[y, x]$, en donde $0 < y < x$, entonces:*

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - [\![t]\!]) f'(t)dt + ([\![x]\!] - x) f(x) - ([\![y]\!] - y) f(y)$$

Demostración. Ver [1]. $\square$

1.2.1. Las Funciones de Chebyshev $\psi(x)$ y $\vartheta(x)$

Definición. Para cada $x > 0$,

1. $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$
2. $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$,

de modo que $\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$

Teorema 1.12. *Para $x > 0$ tenemos*

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}$$

Demostración. Es evidente que $\psi(x) \geq \vartheta(x)$, ahora

$$\psi(x) = \sum_{1 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta\left(x^{1/m}\right) = \vartheta(x) + \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta\left(x^{1/m}\right)$$

pero

$$\vartheta(x) \leq \sum_{p \leq x} \log x \leq x \log x$$

luego

$$\psi(x) - \vartheta(x) \quad \leq \quad \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} x^{1/m} \log\left(x^{1/m}\right) \leq (\log_2 x)\sqrt{x}\log\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2\log 2}$$

□

La desigualdad anterior implica

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x}\right) = 0.$$

Definición. Si $x > 0$, $\pi(x)$ designa el número de primos que no exceden a x.

1.3. Series de Dirichlet

Definición. Una serie de Dirichlet es una serie de la forma

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

en donde $f(n)$ es una función aritmética, s un variable compleja.

Notación. De acuerdo a Riemann $s = \sigma + it$, en donde σ y t son reales.

Teorema 1.13. *Supongamos que la serie de Dirichlet $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge en el punto $s = s_0$ y que $H > 0$ es una constante arbitraria. Entonces la serie $\alpha(s)$ es uniformemente convergente en $S = \{s : \sigma \geq \sigma_0, |t - t_0| \leq H(\sigma - \sigma_0)\}$.*

Demostración. Sea $R(z) = \sum_{n>z} f(n)n^{-s_0}$, notamos que $f(n) = (R(n-1) - R(n))\, n^{s_0}$, ahora tomemos las sumas parciales de $\alpha(s)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=M+1}^{N} f(n)n^{-s} = \sum_{n=M+1}^{N} (R(n-1) - R(n))\, n^{s-s_0} = \\
&= R(M)\,(M+1)^{s-s_0} - R(N)N^{s-s_0} + (s - s_0) \sum_{n=M+1}^{N} R(n-1) \int_{n-1}^{n} z^{s_0-s-1} dz \\
&= R(M)\,(M+1)^{s-s_0} - R(N)N^{s-s_0} + (s - s_0) \sum_{n=M+1}^{N} \int_{n-1}^{n} R(z) z^{s_0-s-1} dz
\end{aligned}$$

pues $R(z)$ es constante en $[n-1, n)$.

Si $|R(z)| \leq \varepsilon$ para todo $z \geq M$ y si $\sigma > \sigma_0$, vemos que

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} f(n)n^{-s} \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon\, |s - s_0| \int_{M}^{\infty} z^{\sigma_0-\sigma-1} dz \leq \left(2 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0}\right) \varepsilon$$

para $s \in \mathcal{S}$, tenemos

$$|s - s_0| \leq \sigma - \sigma_0 + |t - t_0| \leq (H + 1)\,(\sigma - \sigma_0)$$

así se concluye la prueba. □

Corolario 1.14. *Cualquier series de Dirichlet $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ tiene una abscisa de convergencia σ_c con la propiedad de $\alpha(s)$ converge para todo s con $\sigma > \sigma_c$ y para ningún $\sigma < \sigma_c$.*

Observación. En casos extremos esta serie de Dirichlet puede converger sobre todo el plano ($\sigma_c = -\infty$)ó sobre ningún punto del plano ($\sigma_c = -\infty$).

Denotemos $\sigma_a = \text{ínf}\left\{\sigma / \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|\, n^{-\sigma}\right\} < \infty$

Teorema 1.15. *Con las notaciones anteriores, se cumple:* $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$

Demostración. La primera desigualdad es inmediata. Para la segunda desigualdad tomar $\varepsilon > 0$ arbitrario y notemos que $\alpha(\sigma_c + \varepsilon)$ converge, con lo cual para n suficientemente grande tenemos: $|f(n)| \ll n^{\sigma_c + \varepsilon}$, donde la constante puede depender de $f(n)$ y ε, de aquí la serie $\alpha(\sigma_c + 1 + \varepsilon)$ converge absolutamente, pues basta compararla con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon}$. □

Ahora supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma \geq \sigma_a$ y consideremos la función $F(s)$:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \qquad para\, \sigma \geq \sigma_a$$

Lema 1.16. *Si* $N \geq 1$ *y* $\sigma \geq c \geq \sigma_a$ *tenemos*

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| \leq N^{-(\sigma - c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|\, n^{-c}$$

Demostración. Ver [1]. □

Teorema 1.17. *Dadas dos series de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \quad y \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$$

ambas absolutamente convergentes para $\sigma \geq \sigma_a$. *Si* $F(s) = G(s)$ *para cada* s *de una sucesión infinita* $\{s_k\}$ *tal que* $\sigma_k \to +\infty$ *cuando* $k \to +\infty$, *entonces* $f(n) = g(n)$ *para cada* n.

Demostración. Sea $h(n) = f(n) - g(n)$ y sea $H(s) = F(s) - G(s)$. Entonces $H(s_k) = 0$. Supongamos que $h(n) \neq 0$ para un cierto n y obtenemos una contradicción. Sea N el menor entero tal que $h(N) \neq 0$. Entonces

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} h(n)n^{-s} = h(N)N^{-s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n)n^{-s}$$

despejando $h(N)$

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n)n^{-s}$$

tomando $s = s_k$, así $H(s_k) = 0$

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n)n^{-s_k}$$

elegimos k tal que $\sigma_k > c > \sigma_a$. Por el **Lema 1.16**

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k} (N+1)^{-(\sigma_k - c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)|\, n^{-c} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} M$$

donde M no depende de k y además $\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} \to 0$ cuando $k \to +\infty$. Así $h(N) = 0$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 1.18. Multiplicación de Series de Dirichlet

Dadas dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ representadas por dos series de Dirichlet,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \qquad \text{para } \sigma > a, \text{ y}$$
$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s} \qquad \text{para } \sigma > b$$

entonces, en el semiplano en el que ambas convergen absolutamente,, tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s} \qquad \text{en donde } h = f * g.$$

Reciprocamente, si $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)n^{-s}$ para todo s en una sucesión $\{s_k\}$ con $\sigma_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$, entonces $\alpha = f * g$.

Demostración. Para todo s en el que ambas series convergen absolutamente tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)\,(mn)^{-s}$$

debido a la convergencia absoluta, podemos multiplicar estas series y ordenar sus términos, así agrupamos los términos en los cuales mn es constante

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n)g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} (f * g)(k) k^{-s}$$

la segunda afirmación es inmediata del **Teorema 1.17**.

□

Productos Eulerianos

Teorema 1.19. *Sea* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ *absolutamente convergente para* $\sigma > \sigma_a$. *Si* f *es multiplicativa tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left\{ 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right\} \quad si\ \sigma > \sigma_a$$

donde p *recorre los números primos.*

Si f *es completamente multiplicativa tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}} \quad si \sigma > \sigma_a.$$

Demostración. Ver [1] □

Ejemplos.

1. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad si\ \sigma > 1$

2. $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s}) \quad si\ \sigma > 1$

3. $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} \quad \sigma > 2.$

1.4. Sumaciones

Teorema 1.20. Fórmula de Poisson. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^∞ *tal que* $(1+x^2)^n f(x)$ *es acotada para todo* $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)$$

Demostración. Sea

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

así definida es una serie absolutamente y uniformemente convergente, notemos que F tiene periodo 1, luego F admite expansión de Fourier

$$F(x) = \sum a_m e^{-2\pi imx}$$

don

$$a_m = \int_0^1 F(x)e^{2\pi imx}dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{2\pi imx}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{2\pi imx}dx$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{2\pi im(x+n)}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x)e^{2\pi imx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi imx}dx$$

$$= \hat{f}(m)$$

entonces

$$F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)e^{-2\pi imx}$$

evaluando en $x=0$, se obtiene el resultado. □

Teorema 1.21. *Identidad de Abel. Sea a una función aritmética y f una función de clase* C^1 *en el intervalo* $[y,x]$.*Entonces*

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt$$

en donde $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$.

1.5. Polos y Residuos

Definición. Una función f tiene una singularidad asilada en $s = a$ si existe $R > 0$ tal que f es definida analítica en $B\,(a, R) - \{a\}$ pero no es $B\,(a, R)$. Un punto a es llamado singularidad removible si existe una función analítica $g\colon B\,(a, R) \to \mathbb{C}$ tal que $g(s) = f(s)$ para $0 < |s - a| < R$.

Si $s = a$ es una singularidad aislada, la función analítica f admite un desarrollo en series de Laurent alrededor de $s = a$ de la forma

$$f(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (s - a)^n$$

cuando su desarrollo tiene:

- Todas sus potencias son no negativas, si dice que es una singularidad removible.
- Una cantidad finita de potencias negativas, se dice que es un polo.
- Una infinidad de potencias negativas se dice que es una singularidad esencial.

Proposición 1.22. *Si G es una región con a en G y si f es analítica sobre $G - \{a\}$ con polo en $s = a$, entonces existe un entero positivo m y una función analítica $g\colon G \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - a)^m}.$$

Definición. Si f tiene un polo en $s = a$ y m el menor entero positivo tal que $f(s)(s - a)^m$ tiene una singularidad removible en $s = a$ entonces f tiene un polo de orden m en $s = a$.

Sea $s = a$ una singularidad aislada de f y sea

$$f(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (s - a)^n$$

el desarrollo de Laurent alrededor de $s = a$. Entonces el residuo de f en $s = a$ es el coeficiente a_{-1}. Se denota por $Res\,(f; a) = a_{-1}$.

Observación. Si $s = a$ es un polo simple, entonces

$$Res\,(f; a) = \lim_{s \to a}(s - a)f(s).$$

1.6. Función Gamma y Transformada de Mellin

Definición. La función Gamma es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ con polos simples en $s = 0, -1, -2, \cdots$, definida por

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n}$$

donde γ es una constante adecuada tal que $\Gamma(1) = 1$.

Teorema 1.23. *Si $\Re(s) > 0$, entonces*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

Definición. Transformada de Mellin

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx, \quad f(x) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathcal{F}(s)x^{s-1}ds$$

Ejemplo. La Transformada de Mellin de e^{-x}:

$$f(x) = e^{-x}; \quad F(s) = \Gamma(s) \quad (\sigma > 0) \tag{1.1}$$

Lema 1.24. Borel-Carathéodory *Supongamos que la función f es analítica en $|z - z_0| < R$, y tiene una expansión $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Supongamos además que $\Re(f(z)) \leq U$ para $|z| < R$. Entonces*

$$|c_n| \leq \tfrac{2(U - \Re(c_0))}{R^n} \quad n = 1, 2, \cdots,$$

y para $|z - z_0| \leq r < R$, tenemos

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \tfrac{2r}{R-r} \left\{U - \Re\left(f(z_0)\right)\right\}$$

$$\left|\frac{f^{(v)}(z)}{v}\right| \leq \frac{2R}{(R-r)^{v+1}}\left\{U - \Re(f(z_0))\right\}, \ v = 1, 2, \cdots$$

Demostración. Ver [4]. □

Capítulo 2

La Función Zeta de Riemann

2.1. Ecuación Funcional

Si s es un número complejo, con $s = \sigma + it$, en donde $\sigma, t \in \mathbb{R}$ y $i^2 = -1$, la Función Zeta de Riemann ζ está definida por la relación

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \sigma > 1 \tag{2.1}$$

esta serie de Dirichlet converge absolutamente para $\sigma > 1$, y uniformemente en cualquier semiplano $\sigma \geq 1+\delta > 1$. Por la identidad de Euler podemos representar $\zeta(s)$, para $\sigma > 1$ como un producto infinito absolutamente convergente,

$$\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}; \quad \sigma > 1,$$

luego la función ζ no admite ceros en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} / \Re(s) > 1\}$.

Teorema 2.1. *Riemann La función ζ, definida por* (2.1)*, admite una prolongación a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, con polo simple en $s = 1$ con residuo 1, y satisface la ecuación funcional*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Demostración. Sea $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$, $t > 0$, por el Teorema 1.20

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 t} e^{2\pi i \alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\pi t}x - \sqrt{\frac{\pi}{t}}\alpha i\right)^2 + \frac{\pi\alpha^2}{t}} dx$$

$$= e^{\frac{\pi\alpha^2}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\pi t}x - \sqrt{\frac{\pi}{t}}\alpha i\right)^2} dx = e^{\frac{\pi\alpha^2}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{\pi\alpha^2}{t}}$$

así

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{\pi\alpha^2}{t}}$$

entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi k^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi k^2/t}, \qquad t > 0$$

por continuación analítica, para t complejo con $\Re(t) > 0$, si escribimos

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\pi k^2 t}, \qquad \Re(t) > 0$$

luego

$$2\theta(t) + 1 = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(2\theta(\frac{1}{t}) + 1\right) \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(2\theta(\frac{1}{t}) + 1\right) - \frac{1}{2}$$

por otro lado, de la función Gamma, tenemos

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s/2-1} dx, \qquad \sigma = \Re(s) > 0$$

si n es un entero positivo, escribiremos $\pi n^2 x$ por x,

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \left(\pi n^2 x\right)^{s/2-1} \pi n^2 dx = \pi^{s/2} n^s \int_0^{\infty} e^{\pi n^2 x} x^{s/2-1} dx, \quad \sigma > 0$$

despejamos n^s,

$$\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} e^{\pi n^2 x} x^{s/2-1} dx, \qquad \sigma > 0$$

ahora si $\sigma > 1$, tenemos

$$\zeta(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\pi n^2 x} x^{s/2-1} dx$$

como hay convergencia absoluta para $\sigma > 1$, pues

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \left| e^{\pi n^2 x} x^{s/2-1} \right| dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{\pi n^2 x} x^{\sigma/2-1} dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2} n^{\sigma}}$$

podemos intercambiar el orden de la sumatoria y el integral, obteniendo

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty \theta(x) x^{s/2-1}$$

esto lo podemos reescribir como$= \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x) dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\tfrac{1}{t}\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{t}} - \tfrac{1}{2} \right) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x) dx \\
&= \tfrac{1}{s-1} - \tfrac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \theta\left(\tfrac{1}{x}\right) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \theta(x) dx \\
&= \tfrac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \theta(x) dx \, (*)
\end{aligned}$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \tag{2.2}$$

en la integral de $(*)$ en (2.2),

$$\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1} \right) \theta(x)$$

es una función entera, y para cada s es una función integrable, pues converge uniformente en $-\infty < a \leq \sigma \leq b < \infty$ para $x \geq 1$, tenemos

$$\left| x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1} \right| \leq x^{-a/2-1/2} + x^{b/2-1}$$

mientras que

$$\theta(x) < \sum_{n=1}^{\infty} e^{\cdot \pi n x} = \tfrac{1}{e^{\pi x}-1}, \quad x > 0$$

luego la integral de $(*)$ en (2.2) define una función entera, con lo cual

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)}$$

es una función entera. Desde que $\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ es entera, se sigue que

$$\zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)}\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \zeta(s) - \frac{1}{2(s-1)}\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = g(s)$$

donde g es entera, así

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)}\frac{\pi^{s/2}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + g(s)$$

por tanto ζ se extiende a una función meromorfa con polo simple en $s = 1$ y residuo 1. □

Si definimos

$$\eta(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

y

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\eta(s) \tag{2.3}$$

Teorema 2.2. *Con las notaciones anteriores,*

1. La función ξ es entera y $\xi(s) = \xi(1-s)$;
2. $\xi(s)$ es real para todo t y para $\sigma = 1/2$;
3. $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$.

Demostración. Del Teorema 2.1, obtenemos $\xi(s) = \xi(s-1)$

1. En $(*)$ de (2.2),

$$\eta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\theta(x)dx$$

en la cual, el término de la integral es una función entera, luego $\eta(s)$ es meromorfa con polos simples en $s = 0$ y $s = 1$, entonces $s(s-1)\eta(s)$ define una función entera, luego ξ tambien lo es. La simetría es inmediata de la ecuación funcional de ζ.

2. Para $t = 0$, tenemos $\xi(s) = \xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$, así ξ es real para $t = 0$. Para $s = \frac{1}{2} + it$, $\xi(\frac{1}{2} + it)$ y $\xi(\frac{1}{2} + it)$ son conjugados e iguales debido a la ecuación funcional, entonces son reales.

3.
$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\,\zeta(s)$$
tomando para $s = 1$,
$$\xi(1) = \pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
por la ecuación funcional, $\xi(1) = \xi(0) = 1/2$. □

Teorema 2.3. Localización de ceros de ξ.

1. Los ceros de ξ, si hay, están todo localizados en la banda crítica $0 \leq \sigma \leq 1$, y yacen simetricamente alrededor de las líneas $t = 0$ y $\sigma = 1/2$;
2. Los ceros de ζ son identicos, en posición y multiplicidad, con los ceros de ξ, excepto que ζ tiene un cero simple en cada uno de los puntos $s = -2, -4, -6, \cdots$;
3. ξ no tiene ceros sobre la línea $t = 0$.

Demostración. Como $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\,\zeta(s)$,

1. Definimos $H(s)$ por la relación
$$H(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1) \Longrightarrow \xi(s) = H(s)\zeta(s)$$
luego $H(s)$ no se anula para $\sigma > 1$, y $\zeta(s)$ no se anula para $\sigma > 1$, de aquí $\xi(s)$ no se anula para $\sigma > 1$, por el Teorema 2.2, $\xi(s)$ no se anula para $\sigma < 0$. Los ceros de ξ, si hay, se encuentran en la banda $0 \leq \sigma \leq 1$.

Si $\xi(s) = 0$, entonces $\xi\left(\overline{s}\right) = \overline{\xi\left(s\right)} = 0$, luego son simétricos respecto a la recta $t = 0$.

Si $\xi(s) = 0$, por la ecuación funcional tenemos $\xi(1-s) = 0$, por la simetría con $t = 0$ se obtiene la simetría respecto a $\sigma = 1/2$.

2. Los ceros de ζ difieren de los de ξ solo hasta donde H tiene ceros o polos. El único cero de H es en $s = 1$, pero este no es un cero de ξ, pues $\xi(1) = 1/2$, ni de ζ, es un polo de este último.

Los polos de H son simples, en $s = -2, -4, -6, \cdots$; en estos puntos ξ es holomorfa y no se anula, de aquí estos deben ser ceros simples de ζ.

3. Para $0 < \sigma < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s)$$

el primer miembro no se anula, luego $\zeta(s)$ no se anula, luego ξ tampoco. □

2.2. Fórmula de Riemann-Von Mangoldt

Sea $N(T)$ el número de ceros de ζ en el rectángulo

$$0 \leq \sigma \leq 1; \quad 0 \leq t \leq T$$

Teorema 2.4. *Si $\sigma \geq 1$, $t \geq 2$, tenemos*

$$|\zeta(s)| < c \log t, \tag{2.4}$$

donde $c \in \mathbb{R}^+$ una constante. Si δ es tal que $0 < \delta < 1$, y $\sigma \geq \delta$, $t \geq 1$, entonces

$$|\zeta(s)| < c\,(\delta)\, t^{1-\delta} \tag{2.5}$$

donde $c\,(\delta)$ es una constante positiva dependiendo solo de δ.

Demostración. En algún semiplano $\sigma \geq 1 + \varepsilon > 1$, $\zeta(s)$ es acotada,

$$|\zeta(s)| \leq \zeta\,(\sigma) \leq \zeta\,(1 + \varepsilon)$$

por la identidad de Abel, tenemos para $x \geq 1$; $\sigma \geq 0$

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{[\![x]\!]}{x^s} + s \int_1^x \frac{[\![u]\!]}{u^{s+1}} du = \frac{[\![x]\!]}{x^s} + s \left[\int_1^\infty \frac{[\![u]\!] - u}{u^{s+1}} + \int_1^\infty \frac{1}{u^s} du\right] \tag{2.6}$$

para cuando $\sigma > 1$ y $x \to \infty$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{u - [\![u]\!]}{u^{s+1}} du \tag{2.7}$$

la ecuación (2.7) brinda la continuación analítica de ζ para $\sigma > 0$. De (2.6) y

(2.7) tenemos, para $\sigma > 0$, $x \geq 1$,

$$\zeta(s) - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - s\int_1^x \frac{u - [\![u]\!]}{u^{s+1}} du - s\int_x^\infty \frac{1}{u^s} du - \frac{[\![x]\!]}{x^s}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)\frac{x}{x^s} - \frac{[\![x]\!]}{x^s} - s\int_x^\infty \frac{u - [\![u]\!]}{u^{s+1}} du$$

$$= s\int_x^\infty \frac{u - [\![u]\!]}{u^{s+1}} du + \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{x - [\![x]\!]}{x^s}$$

luego

$$|\zeta(s)| < \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tx^{\sigma-1}} + \frac{1}{x^\sigma} + |s|\int_x^\infty \frac{1}{u^{\sigma+1}} du$$

$$< \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tx^{\sigma-1}} + \frac{1}{x^\sigma} + \frac{(\sigma + t)}{\sigma}\frac{1}{x^\sigma}$$

si $\sigma \geq 1$, $t \geq 1$, $x \geq 1$

$$|\zeta(s)| < \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1+t}{x} < (1 + \log x) + 3 + \frac{t}{x}$$

si $t = x$, obtendríamos

$$|\zeta(s)| < c \log t \quad \sigma \geq 1,\ t \geq 2\ .$$

□

Lema 2.5. *Si $R > 0$, y f es una función holomorfa para $|z - z_0| \leq R$, y tiene (al menos n) ceros en $|z - z_0| \leq R$, el cero múltiple es contado de acuerdo a su orden de multiplicidad, entonces, si $f(z_0) \neq 0$, tenemos*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{M}{|f(z_0)|} \tag{2.8}$$

donde $M = \max\{|f(z)|\}$ para $|z - z_0| = R$.

Teorema 2.6. *(***Riemann- Von Mangoldt***) Tenemos*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

cuando $T \to \infty$.

Demostración. Supongamos que $T > 3$. Considerar el ractángulo $\mathcal{R}$ con vértices $2+iT$, $-1+iT$, $-1-iT$, $y\, 2-iT$ en ese orden. La función ξ tiene $2N(T)$ ceros en el interior de $\mathcal{R}$, y ninguno sobre la frontera. De aquí,

$$N(T) = \frac{1}{4\pi}\Im\left(\int_{\mathcal{R}} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds\right)$$

como

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\eta(s)$$

entonces

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}$$

es evidente que

$$\Im\left(\int_{\mathcal{R}}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right)ds\right) = 4\pi$$

y desde que $\eta(s) = \eta(1-s)$ y $\eta\left(\sigma \pm it\right)$ son conjugados, tenemos

$$\Im\left(\int_{\mathcal{R}} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds\right) = 4\Im\left(\int_{L} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds\right)$$

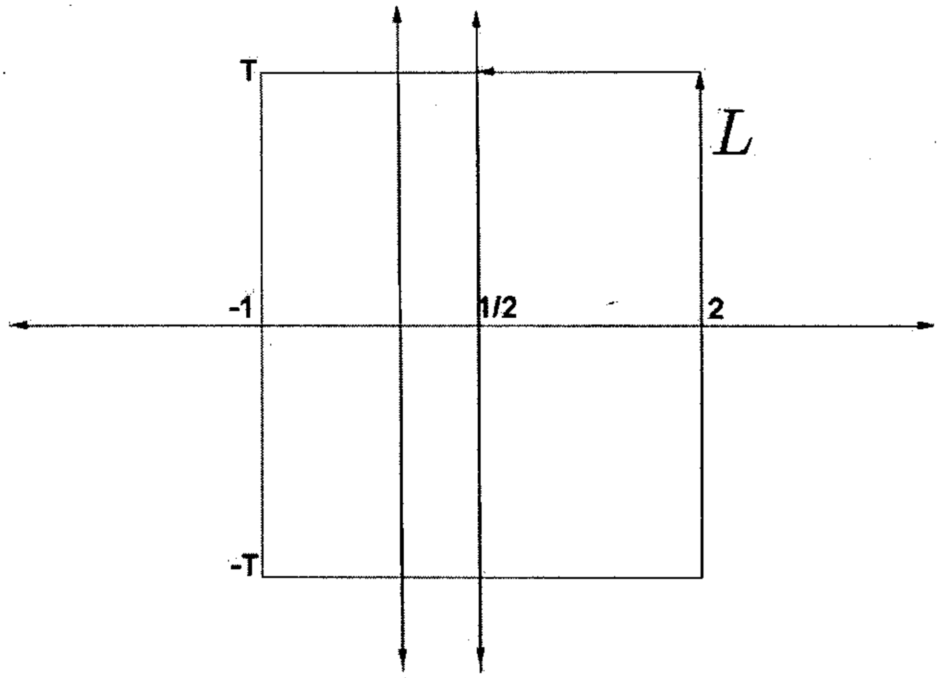

Figura 2.1:

donde L es la parte de la frontera de $\mathcal{R}$ como se muestra en la Figura 2.1 que va de los puntos $s = 2$ a los puntos $s = 2 + iT$ (Camino L_1), junto con la parte que va de $s = 2 + iT$ al punto $s = \frac{1}{2} + iT$ (Camino L_2). Ahora

$$\begin{aligned}
\Im\left(\int_L \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds\right) &= \Im\left(\int_L \left(-\tfrac{1}{2}\log\pi\right)ds\right) + \Im\left(\int_L \frac{\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}ds\right) + \Im\left(\int_L \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right) \\
&= -\tfrac{T}{2}\log\pi + \Im\left(\int_L \frac{\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}ds\right) + \Im\left(\int_L \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right) \\
&= -\tfrac{T}{2}\log\pi + \Im\left(\log\Gamma\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}iT\right)\right) - \Im\left(\log\Gamma(1)\right) + \Im\left(\int_L \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right)
\end{aligned}$$

como tenemos

$$\log\Gamma(z+\alpha) = \left(z + \alpha - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

donde $|\arg(z)| \leq \pi - \varepsilon < \pi$, α es limitado, de manera evidente $\frac{1}{4} + \frac{iT}{2}$ cumple con las condiciones, luego

$$\begin{aligned}\Im\log\Gamma\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}iT\right) &= \Im\left(\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}iT-\tfrac{1}{2}\right)\log\left(\tfrac{1}{2}iT\right)-\tfrac{1}{2}iT+\tfrac{1}{2}\log(2\pi)\right)+O\left(\tfrac{1}{|T|}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}T\log\left(\tfrac{1}{2}T\right)-\tfrac{1}{2}T-\tfrac{\pi}{8}+O\left(\tfrac{1}{|T|}\right)\end{aligned}$$

ahora queda estimar la integral de la derivada logaritmica de ζ sobre el camino L, veamos: Sea "m" el número de puntos s' de L excluyendo los extremos, en los cuales $\Re(\zeta(s'))=0$. Sobre cualquierade los $m+1$ intervalos de L generado por estos puntos, la aplicación $\Re(\zeta(s'))$ no cambia de signo. Denotemos $\mathcal{S}$ uno de los segmentos, entonces

$$\Im\left(\int_{\mathcal{S}}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right)=\Im\left(\int_{\zeta(\mathcal{S})}\frac{dz}{z}\right)$$

donde $\zeta(\mathcal{S})$ es la imagen de $\mathcal{S}$ bajo el mapa $s\to\zeta(s)$. Claramente $\zeta(\mathcal{S})$ está contenido en uno de los semiplanos $\Re(s)\geq 0$ ó $\Re(s)\leq 0$. Si la curva $\zeta(\mathcal{S})$ comienza en el punto $s=a$ y finaliza en el punto $s=b$, y $\overline{a,\ b}$ denota el segmento de línea juntando a y b, por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\zeta(\mathcal{S})}\frac{dz}{z}=\int_{K_{a,b}}\frac{dz}{z}$$

donde $K_{a,b}$ denota el semicírculo, con $\overline{a,\ b}$ como base el cual yace en el mismo semiplano que $\zeta(\mathcal{S})$. De aquí

$$\left|\Im\left(\int_{\zeta(\mathcal{S})}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\right|=\left|\Im\left(\int_{K_{a,b}}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\right|\leq\pi$$

se sigue que

$$\left|\Im\left(\int_{L}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\right|\leq(m+1)\pi$$

por otro lado ningún punto estar sobre L_1, desde que

$$\Re(\zeta(2+it))\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}>1-\frac{1}{2^2}-\int_2^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{4}\qquad(2.9)$$

así "m" es el número de puntos distintos de σ en el intervalo $\frac{1}{2}<\sigma<2$, en los cuales $\Re(\zeta(\sigma+iT))=0$ y es el mismo número de distintos ceros de $g(s)=$

$\frac{1}{2}(\zeta(s+iT)+\zeta(s-iT))$ sobre el eje real, en el intervalo $\frac{1}{2}<\sigma<2$, para $g(\sigma)=\Re(\zeta(\sigma+iT))$ pues σ es real y $\zeta(\sigma\pm iT)$ son conjugados. Como g es holomorfa excepto para $1\pm iT$, y no nula, luego m debe ser finito. Debemos acotar m superiormente, con la ayuda de las estimaciones de $|\zeta(s)|$ obtenidas en el Teorema 2.4 y el Lema 2.5.

Aplicando el lema a la función $g(s)=\frac{1}{2}(\zeta(s+iT)+\zeta(s-iT))$, a los dos círculos $|s-2|\leq\frac{7}{4}$ y $|s-2|\leq\frac{3}{2}$. Desde que suponemos que $T>3$, la función es holomorfa a lo largo de los círculos, además $g(2)\neq 0$, por (2.9). Si usamos la estimación obtenida en (2.5), con $\delta=1/4$, conseguimos, para cada s en $|s-2|=\frac{7}{4}$, la inecuación

$$|g(s)|<\frac{1}{2}c\left(|t+T|^{3/4}+|t-T|^{3/4}\right)<c_1(2+T)^{3/4}$$

desde que $\sigma\geq 1/4$ y $1\leq|t\pm T|<2+T$; por (2.8)

$$\left(\frac{7}{6}\right)^m<\frac{c_1(2+T)^{3/4}}{(1/4)}<T,\qquad para\, T>T_0\geq 3$$

luego $m<c_2\log T$, para $T>T_0$ y c_2 una constante positiva. Reemplazando esto es la inecuación

$$\left|\Im\left(\int_L\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right)\right|\leq(m+1)\pi$$

deducimos que

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

cuando $T\to\infty$. □

2.3. Teorema de Hardy

Lema 2.7. *Sea $F\in C^2[a,b]$, y $F''(x)\geq r>0$ en $[a,b]$. Sea $G\in C^2[a,b]$ y $|G(x)|\leq M$; $G\neq 0$ y $\left(\frac{F'}{G}\right)'$ tiene a lo mucho q ceros distintos en $[a,b]$. Entonces*

$$\left|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx\right|\leq\frac{8M(q+1)}{\sqrt{r}}.$$

Demostración. Ver [6] □

Teorema 2.8. (Hardy). *Existe una infinidad de ceros no reales de ζ con parte real* $1/2$.

Demostración. De la ecuación funcional de ζ, Teorema 2.1, podemos escribirla de la forma $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, donde

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

por lo que $\chi(s)\cdot\chi(1-s) = 1$, lo cual implica $\chi(\frac{1}{2}+it)\cdot\chi(\frac{1}{2}-it) = 1$, y de esto podemos decir que $\left|\chi(\frac{1}{2}+it)\right| = 1$, como $\chi(s)$ es real para s real.

Sea

$$\theta = \theta(t) = -\frac{1}{2}\arg\left(\chi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right),$$

así

$$\chi\left(\frac{1}{2}+it\right) = e^{-2i\theta}$$

definimos

$$Z(t) = e^{i\theta}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \left(\chi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)^{-1/2}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \tag{2.10}$$

como $\Gamma(s)$ no tiene ceros y solo polos reales, la función $(\chi(s))^{-1}$ tiene una raíz cuadrada $(\chi(s))^{-1/2}$ 3n la región simplemente conexa $t > 0$. Podemos reescribir $Z(t)$:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \pi^{-it/2}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it\right)}\right\}^{-1/2}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) \\ &= \pm\pi^{-it/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)\right|}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

escogemos el signo $+$, y lo mantenemos fijo. Si $s = \frac{1}{2}+iz$, donde z es complejo, y

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2}+iz\right),$$

entonces

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2}+iz\right) = \xi\left(\frac{1}{2}-iz\right) = \Xi(z),$$

por el Teorema 2.2, $\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right)$ es real para z real, así $\Xi(t)$ es real para t real, además

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\left(-\tfrac{1}{2}+it\right)\eta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(t^2+\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}it\right)\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it} \end{aligned}$$

lo siguiente, de (2.11)

$$Z(t) = -\frac{2\pi^{1/4}\Xi(t)}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)\right|}$$

y que

$$Z(t) \textit{ es real para } t \textit{ real},$$

por (2.10)

$$|Z(t)| = \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|,$$

si ζ no tiene ceros, o solo un número finito de ceros sobre la línea $\sigma = 1/2$, entonces existiría un T_0 tal que $T > T_0$, tenemos

$$\left|\int_T^{2T} Z(t)dt\right| = \int_T^{2T} |Z(t)|\, dt.$$

Consideremos la integral

$$\int_C \{\chi(s)\}^{-1/2}\zeta(s)ds, \tag{2.12}$$

tomando a lo largo del rectángulo C, limitado por la líneas $\sigma = 1/2$, $\sigma = 5/4$, $t = T$, y $t = 2T$, donde $T > k > 0$, como se muestra en la Figura 2.2. La integral se anula, por el Teorema de Cauchy. La contribución de la parte de C que yacen sobre $\sigma = 1/2$ es

$$-\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+2iT} \{\chi(s)\}^{-1/2}\zeta(s)ds = -i\int_T^{2T} Z(t)dt$$

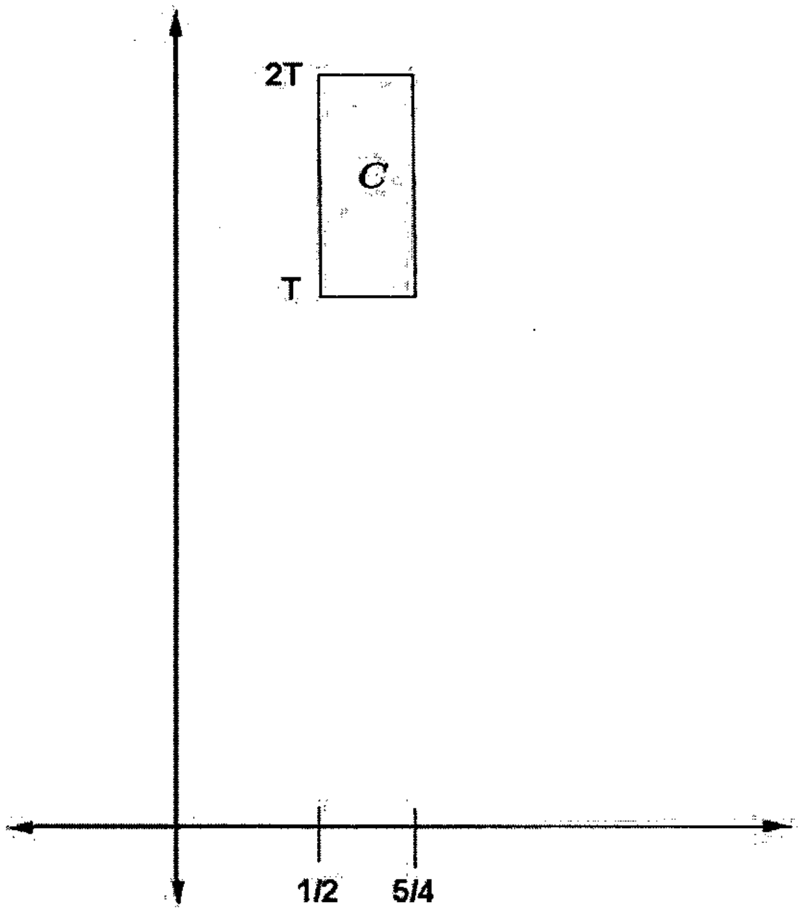

Figura 2.2:

por la definición de $Z(t)$ dada en (2.10). La estimación de los otros tres lados del rectángulo, usamos la fórmula de Stirling para la función Gamma, lo siguiente, en alguna franja fija $-\infty < a \leq b < +\infty$, tenemos, como $t \to \infty$,

$$\Gamma\left(\sigma + it\right) = t^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t-it+\frac{1}{2}i\pi(\pi-\frac{1}{2})} \left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned} \{\chi(s)\}^{-1/2} &= \pm\left(\tfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}\right)^{1/2} \\ &= \pm\left(\tfrac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it} e^{-\frac{1}{2}it-\frac{1}{8}i\pi}\left\{1+O\left(\tfrac{1}{t}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

por otra parte, tenemos de (2.4)

$$\zeta(s) = O(\log t) = O\left(t^{\varepsilon}\right), \qquad \varepsilon > 0$$

para $\sigma = 1$, $t \geq 2$, estimemos

$$\overline{\zeta(it)} = \zeta(-it) = \frac{\zeta(1+it)}{\chi(1+it)} = O\left(t^{1/2}\log t\right)$$

de aquí, por el Principio de Phragmén-Lindelöf, tenemos

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma+\varepsilon}\right), \qquad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$$

similarmente $\zeta(s) = O(1)$ para $\sigma = \frac{5}{4}$, y $\zeta(s) = O(t^{\varepsilon})$ para $t = 1$, implica que

$$\zeta(s) = O(t^{\varepsilon}), \qquad 1 < \sigma \leq \frac{5}{4}$$

de aquí

$$\{\chi(s)\}^{-1/2}\zeta(s) \;=\; \begin{cases} O(t^{\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{4}} \cdot t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma+\varepsilon}) = O\left(t^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ O\left(t^{\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right) = O\left(t^{\frac{3}{8}+\varepsilon}\right), & 1 < \sigma \leq \frac{5}{4} \end{cases}$$

de este modo la contribución a la integral de (2.12), de los lados del rectángulo C paralelos a los ejes reales son $O\left(T^{\frac{3}{8}+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$.

La integral a los largo de la línea $\sigma = \frac{5}{4}$, dado mediante (2.13),

$$\pm i \int_T^{2T} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}it} e^{-\frac{1}{2}it-\frac{1}{8}i\pi}\left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\zeta(\frac{5}{4}+it)dt$$

con una contribución de el O-término de

$$\int_T^{2T} O\left(t^{-\frac{5}{8}}\right)dt = O\left(T^{3/8}\right),$$

el otro término es un múltiplo de

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{4}} \int_T^{2T} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}it} e^{-\frac{1}{2}it-it\log n}dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{4}} \int_T^{2T} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}} e^{\frac{1}{2}t\log\left(\frac{1}{2\pi}t\right)-\frac{1}{2}t-t\log n}dt$$

haciendo

$$\begin{cases} F(t) & = \frac{t}{2}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{t}{2} - t\log n \\ G(t) & = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{3/8} \end{cases}$$

entonces

$$|F'(t)| \geq \frac{1}{4T} = r y \, |G(t)| \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^{3/8} = M$$

por el Lema 2.7

$$\left|\int_T^{2T} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{3/8} e^{i\left(\frac{1}{2}t\log\left(\frac{1}{2\pi}t\right) - \frac{1}{2}t - t\log n\right)} dt\right| \leq \frac{8\left(\frac{T}{\pi}\right)^{3/8}}{\sqrt{\frac{1}{4T}}} = O\left(T^{7/8}\right)$$

combinando todas las estimaciones, tenemos

$$\left|\int_T^{2T} Z(t)dt\right| = O(T^{7/8}) \tag{2.14}$$

por otro lado

$$\int_T^{2T} |Z(t)|\, dt = \int_T^{2T} \left|\zeta(\frac{1}{2} + it)\right| dt \geq \left|\int_T^{2T} \zeta(\frac{1}{2} + it) dt\right|$$

y

$$\begin{aligned} i\int_T^{2T} \zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right) dt &= \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+2iT} \zeta(s)ds = \int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT} \zeta(s)ds + \int_{2+iT}^{2+2iT} \zeta(s)ds + \int_{2+2iT}^{\frac{1}{2}+2iT} \zeta(s)ds \\ &= \left[(2+2iT) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+2iT}\log n}\right] - \left[(2+iT) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+iT}\log n}\right] \\ &\quad + O(T^{1/2}) \\ &= iT + O\left(T^{1/2}\right) \end{aligned}$$

entonces, para $T > T_0$

$$\int_T^{2T} |Z(t)|\, dt > \frac{1}{2}T \tag{2.15}$$

de (2.14) y (2.15), $Z(t)$ no mantiene el signo, luego existen infinitos ceros no reales de ζ con parte real $1/2$. □

2.4. Teorema de Hamburger

Teorema 2.9. *Sea G una función entera de orden finito, P un polinomio y $s = \sigma + it$ una variable compleja, σ, t reales. Sea $f(s) = G(s)/P(s)$, y*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos, y la series converge absolutamente para $\sigma > 1$. Si

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s) \tag{2.16}$$

donde

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}},$$

la serie converge absolutamente para $\sigma < -\alpha < 0$. Entonces

$$f(s) = a_1\zeta(s) = g(s).$$

Demostración. Para $x > 0$, sea

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}x^{-s/2}ds$$

la integral converge desde que $f(s)$está acotada sobre la línea $\sigma = 2$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$, luego por (1.1)

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\pi n^2 x\right)^{-s/2} ds = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x} \tag{2.17}$$

de (2.16), tenemos $S_1 = S_2$, donde

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} g(1-s)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)\pi^{-(1-s)/2}x^{-s/2}ds \tag{2.18}$$

debemos trasladar le línea de integración de (2.18) con $\sigma = 2$ a $\sigma = -1-\alpha < -1$, donde α es tal que todo polo de f (los cuales son un número finito) están contenidos en la franja $-1-\alpha < \sigma < 2$. La función $g(1-s)$ está limitada sonbre la línea $\sigma = -1-\alpha$, desde que la serie $\sum b_n n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma < -\alpha$. Desde que $f(s)$está limitada sobre la línea $\sigma = 2$, y

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)} = O\left(|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\right),$$

se sigue de la igualdad anterior y (2.16) que $g(1-s) = O\left(|t|^{3/2}\right)$ sobre $\sigma = 2$. Por la hipótesis sobre f, se sigue que existen dos números $T > 0$, $\rho > 0$, tal que para $|t| \geq T$ y $-1-\alpha \leq \sigma \leq 2$, la función $g(1-s) = O\left(e^{|t|^{\rho}}\right)$. De aquí, por el Principio de Pharagmén- Lindelöf

$$g(1-s) = O\left(|t|^{3/2}\right)$$

para $|t| \geq T$, $-1-\alpha \leq \sigma \leq 2$. Aplicando el teorema de Cauchy al rectángulo, obtenemos

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-\alpha-i\infty}^{-1-\alpha+i\infty} g(1-s)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s(s-1)}x^{-\frac{1}{2}s}ds + \sum_{v=1}^{m} R_v \qquad (2.19)$$

donde $\sum\limits_{v=1}^{m} R_v$ denota la suma de los residuos de todos los polos. Pero el integrando es $f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(nx)^{-s/2}$, y los residuos de un polo s_v de orden q_v es de la forma

$$x^{-s_v/2}\left(A_{q_v-1}^{(v)}\log^{q_v-1}x + \cdots + A_1^{(v)}\log x + A_0^{(v)}\right)$$

de aquí

$$\sum_{v=1}^{m} R_v = \sum_{v=1}^{m} x^{-s_v/2}Q_v(\log x) = Q(x) \qquad (2.20)$$

en donde $Q_v(x)$ es un polinomio en x. Aquí

$$\Re(s) \leq 2-\delta,\ \delta > 0,\ para\, v = 1, 2, \cdots, m \qquad (2.21)$$

desde que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma > 2-\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, luego tenemos por (2.19)

$$\begin{aligned} S_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{b_n}{2\pi i} \int_{-1-\alpha-i\infty}^{-1-\alpha+i\infty} \Gamma\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s\right) \left(\tfrac{\pi n^2}{x}\right)^{-(1-s)/2} ds + Q(x) \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{b_n}{2\pi i} \int_{1+\frac{1}{2}\alpha-i\infty}^{1+\frac{1}{2}\alpha+i\infty} \Gamma(s) \left(\tfrac{\pi n^2}{x}\right)^{-s} + Q(x) \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x) \end{aligned} \tag{2.22}$$

de (1.1). Desde que $S_1 = S_2$, tenemos de (2.17) y (2.22),

$$2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x)$$

si multiplicamos por $e^{-\pi t^2 x}$, para $t > 0$ fijo, integrando con respecto a x sobre $(0, +\infty)$ tenemos

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\pi\left(t^2+n^2\right)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t} e^{-2\pi n t} + \int_0^{\infty} Q(x) e^{-\pi t^2 x} dx \tag{2.23}$$

desde que

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x - \frac{b^2}{x}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{x}}{a} e^{-2ab}, \ a > 0, \ b \geq 0$$

sustituimos $Q(x)$ de (2.20) en (2.23), e integrando término a término, desde que cada uno es los términos es $O\left(x^{-1+\frac{1}{4}\delta}\right)$ cuando $x \to \infty$, por (2.21). Por lo que

$$\int_0^{\infty} Q(x) e^{-\pi t^2 x} dx = \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} Q\left(\frac{x}{t^2}\right) e^{-\pi x} dx = \sum_{v=1}^{m} t^{s_v - 2} H_v(\log t) = H(t) \tag{2.24}$$

donde $H_v(\log t)$ es un polinomio en $\log t$. Por (2.23) y (2.24) tenemos, para $t > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t+in} - \frac{1}{t-in}\right) - \pi t H(t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2\pi n t} \tag{2.25}$$

La series de la izquierda es una función meromorfa, y sus polos son de la forma: $\pm in$; además la función de la derecha es peródica con periodo i, luego la función de la izquierda. Así los residuos de ki son iguales, es decir, $a_k = a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, luego $a_k = a_1$ para todo k. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Littlewood y el Método de Weyl

3.1. Inecuaciones de Weyl

La estimación de una suma general de la forma $\sum_{n=N}^{N'} n^{-it}$ es reducido a la suma de Weyl $\sum_{n=N}^{N'} e^{-iP(n)}$, donde P es un polinomio con coeficientes reales.

Lema 3.1. *Sean k, μenteros positivos, t un número real, $t \geq 1$, a y b enteros positivos, $b - a \geq 1$, y $\frac{b-a}{a} \leq \frac{1}{2}t^{-1/(k+1)}$. Sea M tal que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\mu} \exp\left\{ it \left(\frac{n}{a} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{a^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}m^k}{ka^k} \right) \right\} \right| \leq M$$

para $\mu \leq b - a$. Entonces

$$\left| \sum_{n=a+1}^{b} e^{-it\log n} \right| < 4M$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=a+1}^{b} e^{-it\log n} \right| &= \left| \sum_{m=1}^{b-a} e^{-it\log(a+m)} \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{b-a} \exp\left\{ -it \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}m^j}{ja^j} \right) - it \left(\frac{(-1)^k m^{k+1}}{(k+1)a^{k+1}} + \cdots \right) \right\} \right|,
\end{aligned}$$

desde que $m/a \leq (b-a)/a \leq 1/2$. Para $0 \leq x \leq 1$, tenemos la expresión

$$\exp\left\{-it \sum_{v=k+1}^{\infty} (-1)^{v-1}\frac{x^v}{v}\right\} = \sum_{l=0}^{\infty} e_l(t)x^l$$

luego

$$\exp\left\{-it\left(\frac{(-1)^k\, m^{k+1}}{(k+1)\, a^{k+1}} + \cdots\right)\right\} = \sum_{v=0}^{\infty} e_v(t)x^v$$

de aquí

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=a+1}^{b} e^{-it\log n}\right| &= \left|\sum_{m=1}^{b-a} \exp\left\{-it\left(\tfrac{n}{a} - \tfrac{1}{2}\tfrac{n^2}{a^2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}m^k}{ka^k}\right)\right\} \sum_{v=0}^{\infty} e_v(t)\left(\tfrac{m}{a}\right)^v\right| \\
&= \left|\sum_{v=0}^{\infty} \tfrac{e_v(t)}{a^v} \sum_{m=1}^{b-a} m^v \exp\left\{-it\left(\tfrac{n}{a} - \tfrac{1}{2}\tfrac{n^2}{a^2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}m^k}{ka^k}\right)\right\}\right| \\
&\leq \sum_{v=0}^{\infty} \tfrac{|e_v(t)|}{a^v} \left|\sum_{m=1}^{b-a} m^v \exp\left\{-it\left(\tfrac{n}{a} - \tfrac{1}{2}\tfrac{n^2}{a^2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}m^k}{ka^k}\right)\right\}\right|
\end{aligned}$$

ahora estimamos $\sum_{m=1}^{b-a} m^v \exp\left\{-it\left(\frac{n}{a} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{a^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}m^k}{ka^k}\right)\right\} \leq 2M\,(b-a)^v$; por la identidad de Abel, así

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=a+1}^{b} e^{-it\log n}\right| &\leq 2M \sum_{v=0}^{\infty} |e_v(t)|\left(\tfrac{b-a}{a}\right)^v \\
&\leq 2M\exp\left\{t\left(\tfrac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)a^{k+1}} + \cdots\right)\right\} \\
&\leq 2M\exp\left\{\frac{t\left(\frac{b-a}{a}\right)^{k+1}}{1-\frac{b-a}{a}}\right\}
\end{aligned}$$

ahora

$$\frac{t\left(\frac{b-a}{a}\right)^{k+1}}{1-\frac{b-a}{a}} \leq \frac{t\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{k+1}}} \leq \frac{2^{-(k+1)}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}$$

y $e^{1/2^k} < 2$. Obteniéndose el Lema. $\square$

Ahora sea

$$S = \sum_{m=1}^{\mu} e^{2\pi i P(m)} \tag{3.1}$$

donde μ es un entero positivo y P es un polinomio de grado k con coeficientes reales. Trivialmente tenemos

$$|S| \leq \mu$$

pero podemos obtener una mejor estimación.

Si consideramos el caso $P(m) = \alpha m$, α real, entonces tenemos, para α no entero,

$$|S| = \left|\frac{1 - e^{2\pi i\alpha\mu}}{1 - e^{2\pi i\mu}}\right| \leq \frac{1}{|1 - e^{2\pi i\mu}|} = |\csc \pi\alpha|$$

por lo que

$$|S| \leq \text{mín}\,\{\mu, |\csc \pi\alpha|\} \tag{3.2}$$

si consideramos el caso $P(m) = \alpha m^2 + \beta m$, con α, β reales, entonces

$$|S|^2 = \sum_{m=1}^{\mu}\sum_{m'=1}^{\mu} e^{2\pi i\left(\alpha m^2 + \beta m - \alpha m'^2 + \beta m'\right)}$$

haciendo $m' = m - r$, esta suma doble toma la forma

$$\sum_m\sum_r e^{2\pi i\left(2\alpha m r - \alpha r^2 + \beta r\right)}$$

agrupando de manera adecuada, con la desigualdad triangular, teniendo en cuenta lo siguiente

$$-\mu + 1 \leq r \leq \mu - 1$$

como $\mu \geq m - r \geq 1$, entonces $\text{mín}\,\{r + \mu,\ \mu\} \geq m \geq \text{máx}\,\{1, 1 + r\}$, luego

$$|S|^2 \leq \sum_{r=-\mu+1}^{\mu-1} \left|\sum_{m=\text{máx}(r+1,\,1)}^{\text{mín}(r+\mu,\,\mu)} e^{4\pi i\alpha m r}\right| \leq \sum_{r=-\mu+1}^{\mu-1} \text{mín}\,\{\mu,\ |\csc 2\pi\alpha r|\}$$

$$|S|^2 \leq \mu + 2\sum_{r=1}^{\mu-1} \text{mín}\,\{\mu,\ |\csc 2\pi\alpha r|\} \tag{3.3}$$

esto nos brinda estimaciones de polinomios de grados 1 y 2. Ahora consideremos cuando el grado es arbitrario.

Teorema 3.2. *Inecuación de Weyl. Sea k un entero positivo, y*

$$P(m) = \alpha m^k + a_{k-1}m^{k-1} + \cdots + a_1 m$$

donde α, $\alpha_1, \cdots, a_{k-1}$ son reales, $\alpha \neq 0$. Sea μ un entero positivo, y

$$S = \sum_{m=1}^{\mu} e^{2\pi i P(m)}$$

Sea $T = 2^{k-1}$, $k \geq 2$. Entonces tenemos

$$|S|^T \leq 2^{2T}\mu^{T-1} + 2^T\mu^{T-k} \sum_{r_1,\cdots,r_{k-1}} \min\left(\mu,\ |\csc \pi\alpha k! R|\right), \tag{3.4}$$

donde $R = r_1 \cdot \cdots \cdot r_{k-1}$, y cada r_j varía de 1 a $\mu - 1$.

Demostración. Si $k = 1$, 2 la conclusión resulta de (3.2) y (3.3). Consideremos solo el caso $k > 2$, tenemos

$$\begin{aligned} |S|^2 &= \sum_m\sum_{m'} e^{2\pi i\{P(m)-P(m')} \\ &= \sum_m\sum_r e^{2\pi i\{P(m)-P(m-r)}, \ m' = m - r \\ &\leq \sum_{r=-\mu+1}^{\mu-1} |S_1| \end{aligned}$$

donde

$$S_1 = S_1(r) = \sum_{m=\max(r+1,1)}^{\min((r+\mu,\ \mu))} e^{2\pi i\{P(m)-P(m-r)}$$

por la desigualdad de Holder

$$|S|^2 \leq \left(\sum_{r=-\mu+1}^{\mu-1} 1\right)^{1-\frac{1}{2}T} \left(\sum_{r=-\mu+1}^{\mu-1} |S_1|^{T/2}\right)^{2/T}$$

$$|S|^2 \leq (2\mu)^{1-\frac{1}{2}T} \left(\mu^{T/2} + \sum_{\substack{r=-\mu+1 \\ |r|\geq 1}}^{\mu-1} |S_1|^{T/2}\right)^{2/T}$$

de aquí, elevando a la $T/2$, obtenemos

$$|S|^T \leq (2\mu)^{\frac{T}{2}-1} \left(\mu^{T/2} + \sum_{\substack{r=-\mu+1 \\ |r|\geq 1}}^{\mu-1} |S_1|^{T/2} \right) \tag{3.5}$$

Probemos por indución sobre k en (3.4). En (3.3) se muestra que es verdad para $k = 2$, lo siguiente es para todo $k \geq 2$. Hacemos una estimación para S_1, obteniendo

$$|S_1|^{T/2} \leq 2^T \mu^{\frac{T}{2}-1} + 2^{\frac{T}{2}} \mu^{T-k+1} \sum_{r_2,\cdots,r_{k-1}} \text{mín}\left(\mu, \left|\csc\left(r\pi\alpha k\left(r_2, \cdots, r_{k-1}\right)(k-1)!\right)\right|\right)$$

de (3,5)

$$|S|^T \leq 2^{\frac{T}{2}-1} \mu^{T-1} + 2^{\frac{3}{2}T} \mu^{T-1} + 2^T \mu^{T-k} \sum_{r,r_2,\cdots,r_{k-1}} \text{mín}\left(\mu, \left|\csc\left(\pi\alpha k! R\right)\right|\right)$$

lo cual implica (3.4). □

La inecuación de Weyl puede ser usada en estimaciones de sumas del tipo $\sum\limits_{n=a+1}^{b} n^{it}$.

Teorema 3.3. *Para* $a < b \leq 2a$; $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$, $a = O(t)$, $t > t_0$. *Entonces tenemos*

$$\sum = \sum_{n=a+1}^{b} n^{-it} = O\left(a^{1-\frac{1}{K}} t^{1/K(k+1)} \log^{1/K} t\right) + O\left(a t^{-1/K(k+1)} \log^{(k-1)/K} t\right)$$

Si $a \leq 4t^{1/(k+1)}$, *entonces*

$$\sum = O(a) = O\left(a^{(K-1)/K} t^{1/K(k+1)}\right)$$

Demostración. Sea

$$\mu = \left[\!\left[\frac{1}{2} a t^{-1/(k+1)} \right]\!\right]$$

y escribimos

$$\sum = \sum_{n=a+1}^{a+\mu} n^{-it} + \sum_{n=a+\mu+1}^{a+2\mu} n^{-it} \cdots + \sum_{n=a+\mu N+1}^{b} n^{-it} = \sum_{1} + \cdots \sum_{N+1} .$$

entonces $\sum_v = O(M)$, donde M es el máximo, para $\mu' \leq \mu$, de

$$S_v = \sum_{n=1}^{\mu'} \exp\left\{-it\left(\frac{n}{a+v\mu} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{(a+v\mu)^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}m^k}{k(a+v\mu)^k}\right)\right\}$$

por el Teorema 3.2

$$S_v = O\left(\mu^{\frac{K-1}{K}}\right) + O\left[\mu^{\frac{K-1}{K}}\left\{\sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}} \min\left(\mu, \left|\csc\left(\frac{\pi\alpha k! r_1 \cdots r_{k-1}}{(a+v\mu)^k}\right)\right|\right)\right\}^{1/K}\right]$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum &= O\left\{(N+1)\mu^{(K-1)/K}\right\} \\
&+ O\left[\mu^{(K-1)/K}\sum_{v=1}^{N+1}\left\{\sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}} \min\left(\mu, \left|\csc\left(\tfrac{t(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}}{2(a+v\mu)^k}\right)\right|\right)\right\}^{1/K}\right] \\
&= O\left\{(N+1)\mu^{(K-1)/K}\right\} \\
&+ O\left[\mu^{\frac{K-1}{K}}(N+1)^{\frac{K-1}{K}}\left\{\sum_{v=1}^{N+1}\sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}} \min\left(\mu, \left|\csc\left(\tfrac{t(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}}{2(a+v\mu)^k}\right)\right|\right)\right\}^{1/K}\right]
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Holder, ahora como varía v,

$$\frac{t(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}}{2(a+v\mu)^k} - \frac{t(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}}{2(a+(v-1)\mu)^k}$$

se encuentra entre múltiplos constantes de $t(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}\mu a^{-k-1}$, es decir de $(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}\mu^{-k}$. El número de intervalos de la forma $\left\{l\pi, \left(l \pm \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$ contiendo valores de $\frac{1}{2}t(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}(a+v\mu)^{-k}$ es por consiguiente

$$O\left\{(N+1)(k-1)! r_1 \cdots r_{k-1}\mu^{-k} + 1\right\}$$

la parte de la v- suma correspondiente a cada intervalo es, como en el caso anterior,

$$\mu + O\left(\frac{\mu^k}{(k-1)!r_1\cdots r_{k-1}}\right) + O\left(\frac{\mu^k}{2(k-1)!r_1\cdots r_{k-1}}\right) + \dots$$

$$= \mu + O\left(\frac{\mu^k \log t}{(k-1)!r_1\cdots r_{k-1}}\right) = O\left(\frac{\mu^k \log t}{r_1\cdots r_{k-1}}\right)$$

de aquí la v- suma es

$$O\left\{(N+1)\log t\right\} + O\left(\frac{\mu^k \log t}{r_1\cdots r_{k-1}}\right)$$

sumando con respecto a $r_1, \dots, r_{k-1}$, obtenemos

$$O\left\{(N+1)\mu^{k-1}\log t\right\} + O\left(\mu^k \log^k t\right)$$

de aquí

$$\sum = O\left\{(N+1)\mu^{(K-1)/K}\right\} + O\left\{(N+1)\mu^{(K-1)/K}\log^{1/K} t\right\} + O\left\{(N+1)^{(K-1)/K}\mu\log^{k/K} t\right\}$$

el primer término del segundo miembro puede ser omitido, y desde que

$$N+1 = O\left(\frac{b-a}{\mu}+1\right) = O\left(t^{1/(k+1)}\right)$$

así concluye la prueba. □

3.2. Resultados de Hardy, Littlewood y Weyl

Teorema 3.4. *Para $t \geq 3$, tenemos*

$$\zeta(s) = O\left(t^{4(1-\sigma)/\log(1/(1-\sigma))}\frac{\log t}{\log\log t}\right) \tag{3.6}$$

uniformemente para $\frac{63}{64} \leq \sigma < 1$. Por continuidad, (3.6) *implica que*

$$\zeta(1+it) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)\ (*)$$

además

$$\zeta(s) = O\left(\log^A t\right),\ A > 1 \tag{3.7}$$

para

$$\sigma \geq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t},\ t \geq 3.$$

Demostración. Como un primer paso, nosotros probamos que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{[\![t^2]\!]} n^{-s} + O(1) \tag{3.8}$$

uniformemente para $t > 3$. Esto resulta de la relación

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} n^{-s} = -s\int_N^\infty \frac{u - [\![u]\!]}{u^{s+1}} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}}$$

la cual es válida para $\sigma > 0$, y algún entero $N \geq 1$. Si hacemos $N = [\![t^2]\!]$, $t > 3$, y $\frac{31}{32} \leq \sigma < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{[\![t^2]\!]} n^{-s} + O\left(t\int_N^\infty \frac{du}{u^{\frac{31}{32}+1}}\right) + O\left(N^{1-\sigma}t^{-1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{[\![t^2]\!]} n^{-s} + O\left(tN^{-31/32}\right) + O\left(N^{1-\sigma}t^{-1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{[\![t^2]\!]} n^{-s} + O(1)
\end{aligned}$$

la constante está envuelta en el O- término. Esto prueba (3.8).

Como segundo paso probaremos que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{[\![t^{1/2}]\!]} n^{-s} + O(1) \tag{3.9}$$

uniformemente para $\frac{31}{32} \leq \sigma < 1$, $t > 3$. Esto seguirá de (3.8), si mostramos que

$$\left|\sum_{t^{1/2} < n \leq t^2} n^{-s}\right| = O(1) \tag{3.10}$$

distribuimos la suma como

$$\sum_{t^{1/2}<n\le t^2} n^{-s} = \sum_{n=[\![t^{1/2}]\!]+1}^{2[\![t^{1/2}]\!]} n^{-s} + \sum_{n=2[\![t^{1/2}]\!]+1}^{4[\![t^{1/2}]\!]} n^{-s} + \ldots + \sum_{\frac{1}{2}t^{1/2}<2^r[\![t^{1/2}]\!]\le t^2} n^{-s}$$

el número de sumas es $O(\log t)$, y si h es un entero no negativo, tal que $2^{h+1}[\![t^{1/2}]\!] \le t^2$, entonces

$$\sum_{n=2^h[\![t^{1/2}]\!]+1}^{2^{h+1}[\![t^{1/2}]\!]} n^{-s} = O\left(2^{\sigma h}t^{-\sigma/2}M\right)$$

donde

$$M = \sup_{2^h[\![t^{1/2}]\!]+1\le\mu\le 2^{h+1}[\![t^{1/2}]\!]+1} \left| \sum_{2^h[\![t^{1/2}]\!]+1}^{\mu} n^{-it} \right|$$

si usamos el Teorema 3.3 con $k = 2 = K$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{2^h[\![t^{1/2}]\!]+1}^{2^{h+1}[\![t^{1/2}]\!]} n^{-s} &= O\left(2^{-\sigma h}t^{-\sigma/2}\right)\left\{O\left(2^{h/2}t^{1/4}t^{1/6}\log^{1/2}t\right) + O\left(2^h t^{1/2}t^{-1/6}\log t\right)\right\} \\
&= O\left(t^{-\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{4}}t^{1/6}\log t\right) + O\left(\left(2^h t^{1/2}\right)^{1-\sigma}t^{-1/6}\log t\right) \\
&= O\left(\tfrac{1}{\log t}\right) + O\left(t^{(1-\sigma)/2}t^{-1/6}\log t\right) \\
&= O\left(\tfrac{1}{\log t}\right)
\end{aligned}$$

desde que el númerp de sumas es $O(\log t)$, esto prueba (3.9).

Como un tercer paso, probaremos que

$$\zeta(s) = \sum_{1\le n\le t^{2/r}} n^{-s} + O(1) \tag{3.11}$$

uniformemente para $\frac{1}{R} \le \sigma < 1$, donde $R = 2^{r-1}$, y r es un entero tal que $6 \le r \le \log\log t$. Esto seguirá de (3.10) si probamos que

$$\sum_{t^{2/r}<n\le t^{1/2}} n^{-s} = O(1) \tag{3.12}$$

en el rango dado de σ y t. Para probar (3.12) verificaremos que

$$\sum_{t^{2/(k+2)}<n\leq t^{2/(k+1)}} n^{-s} = O\left(t^{-1/8Kk}\log^2 t\right) \tag{3.13}$$

para $k \geq 3$, $1-\frac{1}{4K} \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 3$, k entero, $K = 2^{k-1}$. El O- término es uniforme en k. Esta suma se puede repartir

$$\sum_{n=\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket+1}^{2\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket} + \sum_{n=2\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket+1}^{4\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket} + \ldots + \sum_{n=2^h\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket+1}^{2^{h+1}\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket} + \ldots,$$

el número de tales sumas es $O(\log t)$, desde que

$$t^{2/(k+2)}2^{\log t} > 2^{\log t} = t^{\log 2} > t^{2/(k+1)}$$

para $k \geq 3$, $t \geq 3$. Estimamos estos sumas mediante el Teorema 3.3

$$\sum_{n=2^h\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket+1}^{2^{h+1}\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket} n^{-s} = Q$$

$$\begin{aligned} Q &= O\left(\left(2^h t^{2/(k+2)}\right)^{-\sigma+1-\frac{1}{K}} t^{1/K(k+1)}\log t\right) + O\left(\left(2^h t^{2/(k+2)}\right)^{-\sigma+1} t^{-1/K(k+1)}\log t\right) \\ &= O\left(t^{-\frac{3}{2(k+2)K}+\frac{1}{(k+1)K}}\log t\right) + O\left(t^{\frac{1}{2(k+1)K}-\frac{1}{(k+1)K}}\log t\right) \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{n=2^h\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket+1}^{2^{h+1}\llbracket t^{2/(k+2)}\rrbracket} n^{-s} = O\left(t^{-\frac{1}{8kK}}\log t\right)$$

desde que tienen $O(\log t)$ términos, con orden $O\left(t^{-\frac{1}{8kK}}\log t\right)$, probando así (3.13).

Ahora mostraremos (3.12).

Notemos que si r es un entero positivo tal que $6 \leq r \leq \log\log t$, $R = 2^{r-1}$, y $1-\frac{1}{R} \leq \sigma < 1$, y $3 \leq k \leq r-2$, entonces $2^k \leq 2^{r-2}$, luego

$$4K = 2^2 2^{k-1} = 2^{k+1} \leq 2^{r-1} = R$$

de modo que

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R} \geq 1 - \frac{1}{4K}$$

y

$$Rr \geq 4Kr \geq 4K(k+2) \geq Kk$$

y de (3.13) tenemos

$$\sum_{t^{2/(k+2)} < n \leq t^{2/(k+1)}} n^{-s} = O\left(t^{-1/8kK} \log^2 t\right) = O\left(t^{-1/8rR} \log^2 t\right)$$

como $Rr = 2^{r-1}r \leq 2^{\log\log t - 1} \log\log t$

$$\sum_{t^{2/(k+2)} < n \leq t^{2/(k+1)}} n^{-s} = O\left(t^{-\frac{1}{8}\left(\frac{2^{1-\log\log t}}{\log\log t}\right)} \log t\right)$$

pero $2^{\log\log t} = (\log t)^{\log 2}$, y $1 > \log 2 > \frac{1}{2}$. De aquí

$$\sum_{t^{2/(k+2)} < n \leq t^{2/(k+1)}} n^{-s} = O\left(e^{-\frac{(\log t)^{1-\log 2}}{4\log\log t}} \log^2 t\right) = O\left(\frac{1}{\log t}\right)$$

implica que

$$\sum_{t^{2/r} < n \leq t^{1/2}} n^{-s} = \sum_{k=3}^{r-2} \sum_{t^{2/(k+2)} < n \leq t^{2/(k+1)}} n^{-s} = O\left(\frac{r}{\log t}\right) = O(1)$$

para $6 \leq r \leq \log\log t$, esto prueba (3.12), así el tercer paso está probado.

Para obtener (3.11), hacemos

$$r = \left[\!\left[\text{mín}\left(\frac{\log \frac{1}{1-\sigma}}{\log 2}, \log\log t\right) \right]\!\right]$$

donde $t \geq e^{e^6}$. Por hipótesis, tenemos $\frac{63}{64} \leq \sigma < 1$, se sigue que $\frac{1}{1-\sigma} \geq 64 = 2^6$, de modo que $6 \leq r \leq \log\log t$. Además, por la definición de r, tenemos $\sigma \geq 1 - \frac{1}{2^r} > 1 - \frac{1}{2^{r-1}}$.

Usamos (3.11) y obtenemos

$$\zeta(s) = O\left(\sum_{1\leq n\leq t^{2/r}} n^{-s}\right) + O(1)$$

Ahora considermos dos casos: □

1. Si $1-\sigma \leq \frac{\log\log t}{\log t}$, para t suficientemente grande, tenemos log

$$r \geq \left[\!\left[\min\left(\frac{\log\log t - \log\log\log t}{\log 2}, \log\log t\right)\right]\!\right] \geq \frac{\log\log t}{2}$$

   desde que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{[\![t^{2/r}]\!]} n^{-\sigma} &= \sum_{n=1}^{[\![t^{2/r}]\!]} \frac{n^{1-\sigma}}{n} \leq t^{2(1-\sigma)/r} \sum_{n=1}^{[\![t^{2/r}]\!]} \frac{1}{n} \\ &< e^{\log t\cdot\frac{4}{\log\log t}\cdot\frac{\log\log t}{\log t}} 2\log t^{2/r} \\ &= O\left(\frac{\log t}{r}\right) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) = O\left(t^{\frac{4(1-\sigma)}{\log\frac{1}{1-\sigma}}}\ \frac{\log t}{\log\log t}\right)\end{aligned} \tag{3.14}$$

2. Si $1-\sigma > \frac{\log\log t}{\log t}$, entonces $\log\left(\frac{1}{1-\sigma}\right) < \log\log t$ y

$$r \geq \left[\!\left[\log\frac{1}{1-\sigma}\right]\!\right] > \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\sigma}$$

   y

$$\sum_{n=1}^{[\![t^{2/r}]\!]} n^{-\sigma} < \int_0^{t^{2/r}} \frac{du}{u} = \frac{t^{\left(\frac{2}{r}\right)(1-\sigma)}}{1-\sigma} = O\left(t^{\frac{4(1-\sigma)}{\log\frac{1}{1-\sigma}}}\ \frac{\log t}{\log\log t}\right) \tag{3.15}$$

   de (3.14) y (3.15) obtenemos (3.6) y por continuidad se sigue (∗).

Ahora probaremos (3.7), tenemos que si $1 > \sigma \geq 1 - \frac{(\log\log t)^2}{\log t}$, y t suficientemente grande, entonces por (3.6), tenemos uniformemente

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= O\left(\exp\left\{\frac{4\log t\cdot\frac{(\log\log t)^2}{\log t}}{\log\frac{\log t}{(\log\log t)^2}}\right\}\frac{\log t}{\log\log t}\right) \\ &= O\left(\exp\left(A_1\log\log t\right)\cdot\frac{\log t}{\log\log t}\right) = O\left(\log^A t\right), \quad A>1,\ t>t_1\end{aligned}$$

pues $\zeta(s) = O(\log t)$ para $\sigma \geq 1$, $t \geq 2$, por el Teorema 2.4, así obtenemos (3.7).

3.3. Teorema de Littlewood

Lema 3.5. Landau. *Sea $r > 0$, y f una función holomorfa para $|s - s_0| \leq r$, $f(s_0) \neq 0$, M real,*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M, \quad \textit{para } |s - s_0| \leq r$$

de modo que $M > 0$. Sea $f(s) \neq 0$ en el semicírculo $|s - s_0| \leq r$, $\Re(s) > \Re(s_0)$. Entonces tenemos

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{4M}{r} \tag{3.16}$$

Si suponemos que existe un cero ρ_0 de f sobre el segmento entre $s_0 - \frac{1}{2}r$ y s_0(excluyendo los puntos extremos), entonces

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{4M}{r} - \frac{1}{s_0 - \rho_0} \tag{3.17}$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, suponemos que $f(s_0) = 1$, podemos además suponer que $s_0 = 0$. Así, por hipótesis, $f(s)$ es holomorfa para $|s| \leq r$ y $|f(s)| \leq e^M$, $M > 0$, en tanto $f(0) = 1$ y $f(s) \neq 0$ para $|s| \leq r$, $\sigma > 0$. Tenemos que mostrar:

$$-\Re\left(f'(0)\right) < \frac{4M}{r} \quad y \quad \Re\left(f'(0)\right) < \frac{4M}{r} + \frac{1}{\rho_0}$$

Si ρ recorre todos los ceros de f en $|s| \leq r/2$, entonces la función

$$g(s) = \frac{f(s)}{\prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)}$$

es holomorfa para $|s| \leq r$. Además tenemos, para $|s| = r$

$$\left|1 - \frac{s}{\rho}\right| \geq \left|\frac{s}{\rho}\right| - 1 = \frac{r}{|\rho|} - 1 \geq 1$$

por el Teorema del Módulo Máximo, tenemos

$$|g(s)| \leq |f(s)| < e^M$$

como $g(0) = 1$, y no tiene ningún cero para $|s| \leq r/2$, podemos escribir $g(s) = e^{G(s)}$, donde $G(s)$ es holomirfa para $|s| \leq r/2$, $\Re(G(s)) < M$, y $G(0) = 0$. De aquí por la Desigualdad de Borel- Carathéodory (Lema 1.24), tenemos $|G'(0)| < \frac{4M}{r}$. Por consiguiente

$$\left| f'(0) + \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \right| = \left| \frac{g'(0)}{g(0)} \right| = |G'(0)| < \frac{4M}{r}$$

lo cual implica

$$-\Re(f'(0)) - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{\rho}\right) < \frac{4M}{r} \Longrightarrow -\Re(f'(0)) < \frac{4M}{r} + \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{3.18}$$

por hipótesis, tenemos $\rho \neq 0$, y $\Re(\rho) \leq 0$, para cada ρ. Luego $\Re\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 0$. Si usamos esto para (3.18), obtenemos

$$-\Re(f'(0)) < \frac{4M}{r}$$

si además suponemos que existe un cero $\rho = \rho_0$ tal que $-\frac{1}{2}r < \rho_0 < 0$, y reducimos los términos en (3.18), obtenemos

$$-\Re(f'(0)) < \frac{4M}{r} + \frac{1}{\rho_0}.$$

□

Lema 3.6. *Landau. Sea $\varphi(t)$ y $\frac{1}{\theta(t)}$ funciones positivas, no decrecientes de t para $t \geq t_0$. Sea $\theta(t) \leq 1$, $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y*

$$\frac{\varphi(t)}{\theta(t)} = O\left(e^{\varphi(t)}\right)$$

Sea

$$\zeta(s) = O\left(e^{\varphi(t)}\right),$$

en la región

$$1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2, \quad t \geq t_0$$

Entonces existe una constante positiva A_1, tal que ζ no tiene ceros en la región

$t \geq t_1$,

$$\sigma \geq 1 - A_1 \frac{\theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)} \tag{3.19}$$

Demostración. Sea $\beta + i\gamma$ un cero de ζ en el semiplano superior. Sea σ_0 tal que

$$1 + e^{-\varphi(2\gamma+1)} \leq \sigma_0 \leq 2$$

y sea $s_0 = \sigma_0 + i\gamma, \hat{s_0} = \sigma_0 + 2i\gamma$, $r = \theta(2\gamma+1) > \gamma > t_0 + 1$. Entonces los círculos $|s - s_0| \leq r$ y $|s - \hat{s_0}| \leq r$ se encuentran en la región $\sigma \geq 1 - \theta(t)$, $t \geq t_0$, para

$$\begin{aligned} \sigma_0 - r = \sigma_0 - \theta(2\gamma+1) &\geq 1 + e^{-\varphi(2\gamma+1)} - \theta(2\gamma+1) \geq 1 - \theta(2\gamma+1) \\ &\geq 1 - \theta(2\gamma+1) \end{aligned}$$

desde que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad y \ |\mu(n)| \leq 1$$

tenemos para $1 < \sigma \leq 2$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \zeta(\sigma) < \frac{A}{\sigma - 1}, \qquad A > 0$$

de aquí

$$\left|\frac{1}{\zeta(s_0)}\right| < \frac{A}{\sigma - 1} \leq A e^{\varphi(2\gamma+1)}$$

similarmente

$$\left|\frac{1}{\zeta(\hat{s_0})}\right| < A e^{\varphi(2\gamma+1)}$$

como $\zeta(s) = O(e^{\varphi(t)})$ para $1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2$, existe una constante $A_2 > 0$, tal que

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| < e^{A_2\varphi(2\gamma+1)}, \qquad |s - s_0| \leq r$$

y

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(\hat{s_0})}\right| < e^{A_2\varphi(2\gamma+1)}, \qquad |s - \hat{s_0}| \leq r$$

por el Lema 3.5 con $M = A_2\varphi(2\gamma+1)$, obtenemos

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + 2i\gamma)}\right) < A_3 \frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} \tag{3.20}$$

y si $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2}r$, entonces

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0+2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0+2i\gamma)}\right) < A_3\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{1}{\sigma_0-\beta} \tag{3.21}$$

además, como $\sigma_0 \to 1^+$, tenemos

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \sim \frac{1}{\sigma_0-1}$$

de modo que

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{a}{\sigma_0-1} \tag{3.22}$$

donde $a > 1$, desde que $3+4\cos\theta+\cos 2\theta = 2\,(1+\cos\theta)^2 \geq 0$, para θ real, y

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 1$$

tenemos

$$-\Re\left(3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} + \frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geq 0, \qquad \sigma > 1$$

así, por (3.20), (3.21) y (3.22), obtenemos

$$\frac{3a}{\sigma_0-1} + 5A_3\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{4}{\sigma_0-\beta} \geq 0$$

despejando $\sigma_0 - \beta$,

$$\sigma_0 - \beta \geq \left(\frac{3a}{4(\sigma_0-1)} + \frac{5A_3}{4}\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1}$$

$$1-\beta \geq \left(\frac{3a}{4(\sigma_0-1)} + \frac{5A_3}{4}\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1} - (\sigma_0-1)$$

$$1-\beta \geq= \left(1-\frac{3a}{4}-\frac{5A_3}{4}\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}(\sigma_0-1)\right)\left(\frac{3a}{4(\sigma_0-1)} + \frac{5A_3}{4}\frac{\varphi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}\right)^{-1} \tag{3.23}$$

si tomamos $a = 5/4$, y $\sigma_0 - 1 = \frac{1}{40A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)}$, y γ es suficientemente grande, como $\sigma_0 - 1 \geq e^{-\varphi(2\gamma+1)}$, donde $\varphi(t) \to \infty$ cuando$t \to \infty$, con $\frac{\varphi(t)}{\theta(t)} = O(e^{\varphi(t)})$, el numerador de (3.23) es positivo, y se sigue que

$$1-\beta \geq \frac{\theta(2\gamma+1)}{1240A_3\varphi(2\gamma+1)}$$

suponiendo que $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2}r$, usada en (3.21).

Si $\beta \leq \sigma_0 - \frac{1}{2}r$, entonces la selección de σ_0 nos da

$$\beta \leq \sigma_0 - \frac{1}{2}r = 1 + \frac{1}{40A_3}\frac{\theta(2\gamma+1)}{\varphi(2\gamma+1)} - \frac{1}{2}\theta(2\gamma+1)$$

lo cual no lleva a (3,19). Así el lema está probado. □

Teorema 3.7. Littlewood. *Existe una constante positiva A, tal que*

$$\zeta(s) \neq 0, \qquad \textit{para } \sigma > 1 - \frac{A\log\log t}{\log t},\ t > t_0$$

Demostración. Por (3.7), podemos escoger, en el Lema 3.6

$$\theta(t) = \frac{(\log\log t)^2}{\log t}, \qquad \varphi(t) = A\log\log t,\ A > 1\ y\ t > t_0.$$

□

Corolario 3.8. *Existe una constante A tal que $\zeta(s)$ no tiene ceros para*

$$\sigma \geq 1 - \frac{A}{\log t}, \qquad t > t_0.$$

3.4. Consecuencias del Teorema de Littlewood

Teorema 3.9. *Landau. Sopongamos que η es una función decreciente de t, para $t \geq 0$, y tiene una derivada η', la cual es continua para $t \geq 0$. Supongamos que*

$$0 < \eta(t) \leq \frac{1}{2} \tag{3.24}$$

$$\eta'(t) \to 0, \quad \textit{cuando } t \to \infty; \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{\eta(t)} = O(\log t), \quad \textit{cuando } t \to \infty. \tag{3.26}$$

Supogamos que $\zeta(s)$ no tiene ceros en el dominio

$$\sigma > 1 - \eta(|t|).$$

Sea α un número fijo, tal que $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(\log^2 |t|\right) \tag{3.27}$$

uniformemente en el dominio $\sigma \geq 1 - \alpha\eta\left(|t|\right)$, cuando $t \to \infty$.

Demostración. Podemos asumir que $t > 0$, y limitando la atención a $1 - \alpha\eta(t) \leq \sigma \leq 1 + \alpha\eta(t)$,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\alpha\eta}} = -\frac{\zeta'(1+\alpha\eta)}{\zeta(1+\alpha\eta)} < \frac{c_1}{\alpha\eta}$$

donde $\eta = \eta(t)$, debido a que $\frac{\zeta'}{\zeta}$ tiene un polo simple en $s = 1$. De (3.26) se sigue que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t), \qquad \textit{cuando}\, t \to \infty.$$

Como $\zeta(s)$ es holomorfa y no nula en la región D simplemente conexa, definida por $t > 0$ y $\sigma > 1 - \eta(t)$, la función $Z(s) = \log \zeta(s)$ es holomorfa en D, y

$$Z(s) = \log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}}, \quad \sigma > 1$$

donde m recorre los enteros positivos, y p todos los primos. Nuestro objetivo es estimar $Z'(s)$, lo hacemos mediante una estimación de $\Re\left(Z(s)\right)$, y aplicando el Lema de Borel-Caratheodory.

Sea $T > 1$, $\eta(T) = H$. Escogemos el punto $s_0 = 1 + \alpha H + iT$, $0 < \alpha < 1$, cuando el centro de dos círculos concéntricos de radios r y R, donde $r = 2\alpha H$, y $R = \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)H$, luego $r < R$.

El círculo menor intercepta a la recta $t = T$, en los puntos $1 - \alpha H + iT$ y $1 + 3\alpha H + iT$, y el círculo mayor en los puntos $1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)H + iT$, y $1 + \frac{1}{2}(1+5\alpha)H + iT$. Si T es bastante grande, ambos círculos se encuentran en D. De aquí $R < 2H \leq 1$ por (3.24), $T > 1$, y es una función decreciente, será suficiente mostrar que el punto

$$s' = \sigma' + it' = 1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)H + i(T+R)$$

se encuentra en D, ó la condición $\sigma' > 1 - \eta(t')$ es satisfecho para T grande. Pero esto es así, pues

$$\begin{aligned} \sigma' - 1 + \eta(t') &= -\tfrac{1}{2}(1+\alpha)H + \eta(T+R) \\ &= -\tfrac{1}{2}(1+\alpha)H + \eta(T) + R\eta'(\tau), \quad T < \tau < T+R \\ &= \left(\tfrac{1}{2}(1-\alpha) + \tfrac{1}{2}(1+3\alpha)\eta'(\tau)\right) H > 0 \end{aligned}$$

para todo $T > T_1$, por (2.25). Luego, si $T > T_1$, entonces $Z(s)$ es regular para $|s - s_0| < R$.

A lo largo del disco $|s - s_0| < R$, tenemos $\sigma > \frac{1}{2}$, y $1 < t < T+1$. Por el Teorema 2.4, tenemos

$$\Re\left(Z(s)\right) = \log|\zeta(s)| < \log\left(ct^{1/2}\right) < \log T$$

para $T > T_2$, a lo largo de $|s - s_0| < R$. Además

$$|\Re\left(Z(s)\right)| \leq |Z(s_0)| \leq \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{m(1+\alpha H)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha H}} < \frac{1}{\alpha H}$$

recurriendo al Lema de Borel-Carathéodory, deducimos que

$$|Z'(s)| < \frac{2R}{(R-r)^2}\left(\log T - \Re\left(Z(s_0)\right)\right) < \frac{4(1+3\alpha)}{(1-\alpha)^2}\left(\log T + \frac{1}{\alpha H}\right)$$

a lo largo de $|s - s_0| < r$. Esto guarda en particular, sobre los radios extendiendo de el punto s_0 al punto $1 - \alpha H + iT$, que es, para $s = \sigma + iT$, $1 - \alpha\eta(T) \leq \sigma \leq 1 + \alpha\eta(T)$. Desde que $\frac{1}{H} = O(\log t)$, por (3.26), obtenemos (3.27). $\square$

Teorema 3.10. *Bajo las condiciones del Teorema 3.9, tenemos*

$$\psi_1 - \frac{1}{2}x^2 = O\left(x^2 e^{-\alpha\omega(x)}\right), \quad \textit{cuando}\; x \to \infty$$

donde

- $\omega(x)$ es el mínimo de $\eta(t)\log x + \log t$ para $t \geq 1$.
- $\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u)du$.

Demostración. El mínimo $\omega(x)$ existe para $x > 0$, como $\eta(t)\log x + \log t$ es continua para $t \geq 1$.

Si $x > 1$, tenemos

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u)du = \int_1^x \psi(u)du = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)(x-n) \tag{3.28}$$

y de la fórmula clásica de Perron, tenemos

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c+i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)ds, \quad c > 1 \tag{3.29}$$

Si C denota la curva definida por $\sigma = 1 - \alpha\eta(|t|)$, $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \tag{3.30}$$

esto resulta de (2.29) por el Teorema de Cauchy, lo cual es posible pues el integrando es holomorfo en la región limitada por C y la recta $\sigma = c$, excepto para $s = 1$, y por el Teorema 3.9, es uniformemente $O\left(t^{-2}\log^2|t|\right)$ cuando $t \to \infty$, para x fijo.

Escribimos

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - J \tag{3.31}$$

y buscamos la estimación de J. Debidoa la simetría, podemos la atención en la parte de C, la cual se encuentre en el semiplano superior. Sobre esta parte de C, tenemos, por le Teorema 3.9

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c_1 \log^2(t+2)$$

y

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = |-\alpha\eta'(t) + i| < c_2$$

por (3.25). Desde que

$$|J| < c_3 \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{x^{-\alpha\eta(t)}\log^2(t+2)}{(t+1)^2}dt = c_3\int_1^\infty x^2 \cdot \frac{x^{-\alpha\eta(u-1)}\log^2(u+1)}{u^2}du$$

como $\eta(u-1) \geq \eta(u)$ y $x > 1$, se sigue de (3.31) que

$$\left|\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right| < c_3 \int_1^{\infty} e^{-\alpha\eta(u)\log x - \alpha\log u \cdot \frac{\log^2(u+1)}{u^{2-\sigma}}} du$$

$$\leq c_3 e^{-\alpha\omega(x)} \int_1^{\infty} \frac{\log^2(u+1)}{u^{2-\alpha}} du$$

$$= c_4 e^{-\alpha\omega(x)}$$

lo cual prueba el teorema. □

Teorema 3.11. *Bajo las condiciones del Teorema 3.9, tenemos*

$$\psi(x) - x = O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right) \tag{3.32}$$

y

$$\pi(x) - li(x) = O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right) \tag{3.33}$$

Demostración. Notamos que $\omega(x)$ es una funciòn escritamente creciente de x, para $x > 0$, y también lo es la función $\log x - \omega(x)$. Para $x_1 > x_2 > 0$, y sean t_1, t_2 valores de t para los cuales la mínima $\omega(x_1), \omega(x_2)$ son alcanzados. Entonces

$$\omega(x_2) \leq \eta(t_1)\log x_2 + \log t_1 < \eta(t_1)\log x_1 + \log t_1 = \omega(x_1)$$

en tanto

$$\omega(x_1) \leq \eta(t_2)\log x_1 + \log t_2 = \omega(x_2) + \eta(t_2)(\log x_1 - \log x_2)$$

$$< \omega(x_2) + (\log x_1 - \log x_2)$$

desde que $\omega(1) = 0$, y $\log 1 - \omega(1) = 0$, deducimos que

$$0 < \omega(x) < \log x, para\, x > 1$$

ahora suponemos que $x > 2$. Sea h una función de x, tal que $0 < h < \frac{1}{2}x$. Desde que ψ es una función creciente,

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \psi(u)du \leq \psi(x) \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \psi(u)du \tag{3.34}$$

por definición de ψ_1, las integrales son

$$\frac{\psi_1(x \pm h) - \psi_1(x)}{\pm h} = x \pm \frac{1}{2}h + O\left(x^2 \frac{e^{-\alpha\omega(x/2)}}{h}\right) \tag{3.35}$$

por el Teorema 3.10, y como $\frac{1}{2}x < x - h < x + h < \frac{3}{2}x$, y $\omega(x)$ es una función creciente de x.

En el O-término en (3.35) podemos reemplazar $\omega(\frac{1}{2}x)$ por $\omega(x)$, para $\log u - \omega(u)$ es una función creciente de u, y

$$e^{-\alpha\omega\left(\frac{1}{2}x\right)} = \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\alpha} e^{\alpha\left(\log\frac{1}{2}x - \omega(x)\right)} \leq \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\alpha} e^{\alpha(\log x - \omega(x))} = 2^{\alpha} e^{-\alpha\omega(x)}$$

así de (3.35) y (3.34), tenemos

$$\psi(x) = x + O(h) + O\left(\frac{x^2 e^{-\alpha\omega(x)}}{h}\right)$$

haciendo $h = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}$, obtenemos (3.32).

Para probar (3.33), definimos la función $\Pi(x)$, para $x > 0$, por la relación

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots \tag{3.36}$$

desde que

$$\log\zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}}, \qquad \sigma > 1,$$

tenemos, por la identidad de Abel

$$\log\zeta(s) = s\int_0^{\infty} \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}} ds, \qquad \sigma > 1$$

además

$$\Pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(u)}{u \log^2 u} du$$

y si $x > 2$,

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{u}{u \log u} du$$

de aquí

$$\Pi(x) - li(x) = \frac{\psi(x) - x}{\log x} + O(1) + \int_2^x \frac{\psi(u) - u}{u \log^2 u} du$$

por (3.32), deducimos que

$$\Pi(x) - li(x) = O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right) + O(1) + O\left(\int_2^x e^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(u)} du\right),$$

en donde el término $O(1)$ puede ser omitido, desde que $0 < \omega(x) < \log x$, y

$$xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)} > xe^{-\frac{1}{2}\alpha \log(x)} = x^{1-\frac{1}{2}\alpha} > x^{\frac{1}{2}} > 1 \tag{3.37}$$

supongamos que $x > 2$.

Además tenemos

$$\int_2^x e^{\frac{1}{2}\alpha(\log u - \omega(u))} \frac{du}{u^{\alpha/2}} \leq e^{\frac{1}{2}\alpha(\log x - \omega(x))} \int_2^x \frac{du}{u^{\alpha/2}} = O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right)$$

desde que $1 - \frac{1}{2}\alpha > 0$. Luego

$$\Pi(x) - li(x) = O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right) \tag{3.38}$$

y por (3.36) deducimos que

$$\Pi(x) - li(x) = \sum_{m=2}^{M} \frac{\pi\left(x^{1/m}\right)}{m}, \qquad M = \left[\!\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]\!\right],$$

$$= O(x^{1/2}) + O\left(Mx^{1/3}\right) = O(x^{1/2}) \tag{3.39}$$

obtenemos (3.33) de (3.39), (3.38) y (3.37). □

Teorema 3.12. *Cuando $x \to \infty$, tenemos*

$$\psi(x) - x = O(xe^{-a\sqrt{\log x \log\log x}}),$$

y

$$\pi(x) - li(x) = O(xe^{-a\sqrt{\log x \log\log x}})$$

donde a es una constante absoluta positiva.

Demostración. Del Teorema de Littlewood podemos escoger una función η del Teorema 3.9 al 3.11 como se sigue:

$$\eta(t) = \begin{cases} a\frac{\log\log t}{\log t} & t \geq e^e, \quad a \text{ es una constante} \\ \\ a/e & 0 \leq t \leq e^e \end{cases}$$

escogemos un "a" adecuado que cumpla las condiciones del Teorema 3.9

$$\eta(t)\log x + \log t \geq \begin{cases} 2\left(a\log x\ \log\log t\right)^{1/2} \geq \left(2a\log x\ \log\log x\right)^{1/2}; & t \geq \beta \\ \\ \eta(\beta)\log x = \frac{1}{2}a\left(\log x\right)^{1/2}\log\log x; & 1 \leq t \leq \beta \end{cases}$$

en donde $\beta \geq e^e$. Desde que $\omega(x) \geq \left(2a\log x\ \log\log x\right)^{1/2}$ para x suficientemente grande. Por el Teorema anterior se concluyó la prueba. $\square$

Conclusiones

1. La Función Zeta de Riemann $\zeta(s)$ admite extensión meromorfa a todo el plano complejo con polo simple en $s = 1$ y residuo 1. Al extenderla, $\zeta(s)$, tiene ceros en los pares enteros negativos, llamados ceros triviales.

2. Los ceros llamados no triviales de $\zeta(s)$ se ubican en la banda $0 < \Re(s) < 1$. Riemann mostró que hay una infinidad y Hardy que hay una infinidad de ceros con parte real $1/2$.

3. Aunque la función Zeta de Riemann es una función de variable compleja, al obtenerse estimaciones de su orden solo depende de su parte imaginaria $\Im(s) = t$ para t suficientemente grande, esto es debido al Método de Weyl.

4. Sobre la banda $0 < \Re(s) < 1$, hay regiones libres de ceros, pero su borde en el infinito se acerca a los rectas $s = 0$ y $s = 1$, esto se debe al Teorema de Littlewood.

5. Se hizo estimaciones del término de error de algunas relaciones asintóticas relacionadas al Teorema del Número Primo.

Recomendaciones

1. Una lectura más cuidadosa sobre series de Dirichlet.
2. Un buen manejo de teoría de residuos e integrales complejas, ayudará a la compresión de temas relacionados a esto.
3. De ser interesante lo conseguido con el Método de Weyl, sería muy bueno conocer el Método de Vinogradov.

Bibliografía

[1] **Apostol T.M** '*Introducción a la Teoría Analítica de Números*'; Editorial Reverté. 1984

[2] **Chandrasekharan K.** '*Aritmetical Functions*'; Springer-Verlag Berlin. 1970

[3] **Conway Jhon B.** '*Functions of one Complex Variable*'; Second Edition. Springer-verlag. 1978

[4] **Montgomery Hugh L. and Vaughan Robert C.** '*Multiplicative Number Theory: I: Classical Theory*'; Editorial Board. Cambridge University Press. 2006

[5] **Petterson S.J.** '*An Introduction to Theory of the Riemann Zeta Function*'. Editorial Board. Cambridge University Press. 1995

[6] **Titchmarsh E.C.** '*The Theory of the Riemann Zeta Function*'. Claderon Press Oxford. 1986

Resumen

EL TEOREMA DE LITTLEWOOD Y EL MÉTODO DE WEYL EN LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

Manuel Jesús Saavedra Jiménez

Asesor: DR. Julio Enrique López Castillo

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

Hacemos un estudio de la Función Zeta de Riemann, para luego conocer algunas características de sus ceros, estudiamos el Método de Weyl y demostramos el Teorema de Littlewood y con ello se conoce regiones libres de ceros.

Finalmente hacemos estimaciones del término de error de algunas relaciones asintóticas relacionadas al Teorema del Número Primo.

Palabras Claves:

Función Zeta de Riemann
Teorema de Littlewood
Método de Weyl
Regiones libres de ceros

Abstract

Littlewood´s Theorem and weyl´s Method in the Riemann Zeta Function

Manuel Jesús Saavedra Jiménez

We survey the Riemann Zeta function, then know some characteristics of its zeros, we study the method and demonstrate Weyl Theorem Littlewood and thus free of zeros regions known.

Finally we estimate the error term of some asymptotic relationships related to Primo Number Theorem.

Palabras Claves:

Riemann Zeta Function
Littlewood´s Theorem
Weyl´s Method
Zero − free region of ζ